УДК 693.547.2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ВАКУУМИРОВАНИЮ БЕТОННЫХ СМЕСЕЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ РАЗРЕЖЕНИЯ В ВАКУУМПОЛОСТИ ВАКУУМЩИТА ПО ГАРМОНИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

д.т.н., проф. Приходько А.П., к.т.н., доц. Павленко Т.М., студ. Аббасова А.Р.

ГВУЗ "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", г. Днепропетровск

Постановка проблемы. Касаясь теоретических разработок в рассматриваемой области, следует отметить следующее. Достаточно хорошо изучен процесс вакуумной обработки бетонных смесей при постоянной величине разрежения (давления) в вакуумполости вакуумщита. Другие режимы практически не исследованы. Исходя из этого, настоящая работа посвящена исследованию режимов вакуумирования, в которых величина разрежения (давления) в вакуумполости вакуумщита является гармонической функцией.

Анализ публикаций. Эффективность использования способа вакуумной обработки существенно зависит от знания закономерностей распределения разрежения (давления) в уплотняемой вакуумированием бетонной смеси. Совместным решением уравнения движения извлекаемой при вакуумировании воды, уравнений неразрывности и состояния получено уравнение вакуумной обработки бетонной смеси при постоянном разрежении (давлении) в вакуумполости вакуумщита [1]:

$$\frac{K}{K_{П}\beta_{б.с.}\mu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial t}, \qquad (1)$$

где P – разрежение (давление) в бетонной смеси на расстоянии X от поверхности вакуумщита (фильтра);

t – время вакуумной обработки;

μ, K – соответственно, вязкость воды и коэффициент фильтрации;

$K_{П}$ – коэффициент, зависящий от удобоукладываемости бетонной смеси ($K_{П}$ = 0,95...1,00);

$\beta_{б.с.}$ – коэффициент объемной сжимаемости бетонной смеси:

$$\beta_{б.с.}=\frac{V_a-V}{V_a\left(P-P_a\right)},$$

где V_a – объем смеси при атмосферном давлении P_a;

V – то же, при давлении P.

Обозначив выражение при $\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$ через a, получим уравнение вакуумирования бетонной смеси в следующем виде:

$$\alpha \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \text{ или } \alpha \nabla^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2)$$

где α – коэффициент пьезопроводности.

Уравнение (2) параболического типа аналогично уравнению теплопроводности, которое достаточно хорошо исследовано, разработано несколько методов его решения. Следовательно, имеется возможность по заданным начальным и граничным условиям, используя методы решения уравнения теплопроводности, решить задачу о вакуумировании бетонной смеси (предварительно уложенной вибрационным способом).

Исследуемые нами в дальнейшем аналитические методы для решения подобных задач получили свое первоначальное развитие в работах Фурье, которые посвящены исследованиям по теории теплопроводности [2, 3]. Эти методы многими авторами распространены и на другие области математической физики, они получили свое дальнейшее развитие в классической механике, где рассматриваются независимо от их физического содержания [4, 5].

Обычно представляют решение дифференциального уравнения (2) в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от времени t, а другая – только от пространственных координат [3]:

$$P = C\varphi(t)\psi(x, y, z).$$

Если принято во времени периодическое изменение разрежения (давления) в вакуумполости вакуумщита, то по толщине уплотняемого слоя бетона для $\varphi(t)$ тоже необходимо выбрать периодически изменяющуюся функцию.

Если же задача поставлена так, что разрежение (давление) по толщине слоя уплотняемого бетона стремится выровняться, то для $\varphi(t)$ надо выбрать такую функцию, которая с возрастанием аргумента асимптотически приближается к нулю. Естественно в этом случае необходимо исследовать экспоненциальную функцию с отрицательным показателем. Исходя из этого, примем:

$$P = Ce^{-mt}\psi(x, y, z). \quad (3)$$

Пока C и m являются совершенно произвольными величинами. Далее примем:

$$m = q^2 a.$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$P = Ce^{-q^2at}\psi(x, y, z)\ . \qquad (4)$$

Из уравнения (4) находим:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (-q^2)aCe^{-q^2at}\psi\ ;$$

$$\nabla^2 P = Ce^{-q^2at}\nabla^2\psi\ . \qquad (5)$$

Если оба уравнения (5) подставить в уравнение (2), то получим:

$$\nabla^2\psi + q^2\psi = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, применение экспоненциальной функции для $\varphi(t)$ приводит к решению уравнения вакуумирования бетонной смеси (уравнения параболического типа) при условии, если для функции $\psi(x, y, z)$ можно найти выражение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (6).

В этом случае достигается важное преимущество: число независимых переменных уменьшается на единицу, а именно, выпадает t. Например, в этом случае, когда поле разрежения (давления) зависит только от одной координаты, вместо уравнения в частных производных решается обыкновенное дифференциальное уравнение.

Уравнение (6), которое часто называют дифференциальным уравнением Поккеля, наряду с:

- дифференциальным уравнением Лапласа – $\nabla^2\psi = 0$;

- дифференциальным уравнением Пуассона – $\nabla^2\psi = const$,

является наиболее важным дифференциальным уравнением математической физики в частных производных.

Основной материал. При рассмотрении гармонической функции разрежение (давление) на границе вакуумполости вакуумщита можно представить следующим образом:

$$P_o = P_{ом} \cdot \cos\left(2\frac{\pi}{t_o}t\right)$$

или

$$P_o = P_{ом} \cdot \sin\left(2\frac{\pi}{t_o}t\right), \qquad (7)$$

где P_o – разрежение (давление) в вакуумполости вакуумщита;

$P_{ом}$ – максимальная амплитуда колебания разрежения (давления) в вакуумполости вакуумщита;

t_o – продолжительность периода (частота колебаний);

t – время вакуумной обработки.

Оба условия совершенно равносильны и различаются только сдвигом нулевой точки начала оси времени на $\pi/2$. Таким образом, для того чтобы сделать эти функции тождественными, достаточно допустить сдвиг фазы на $\pi/2$. Поэтому, в дальнейшем мы будем рассматривать только одну функцию – косинус-функцию.

Как было отмечено ранее, для отыскания частных интегралов уравнения (2), представим наше решение в виде произведения двух таких функций, из которых одна зависит только от времени, другая – только от координат (уравнение (3)).

Приняв предложение о периодическом характере изменения разрежения (давления) в вакуумполости вакуумщита, мы, несомненно, должны ожидать, что и по толщине уплотняемого слоя бетонной смеси разрежение (давление) так же изменяется во времени периодически. Поэтому, экспоненциальная функция в отмеченной ранее форме (уравнение (3)) не применима. В этом случае воспользуемся из теории функций комплексного переменного следующим соотношением:

$$e^{+imt} = \cos(mt) + i\sin(mt). \tag{8}$$

Тогда уравнение (4) будет иметь вид:

$$P_x = e^{+iq^2at}\psi(x, y, z). \tag{9}$$

Это в свою очередь дает:

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = +iq^2 a e^{+iq^2at}\psi$$

и

$$\nabla^2 P_x = e^{+iq^2at}\nabla^2\psi. \tag{10}$$

Отсюда получаем следующее уравнение для ψ:

$$\nabla^2\psi - iq^2\psi = 0. \tag{11}$$

Таким образом, мы пришли к уже знакомому дифференциальному уравнению Поккеля (6) с той лишь особенностью, что оно содержит отрицательный чисто мнимый параметр.

Воспользуемся следующей формулой теории функций комплексного

переменного:

$$\sqrt{-i} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Применив эту формулу, можем записать дифференциальное уравнение Поккеля в виде:

$$\nabla^2\psi - \left[\pm(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}q}\right]^2\psi = 0. \qquad (12)$$

Легко видеть, что на месте действительной величины q теперь стоит комплексная величина

$$\pm(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}q}\,.$$

После этих предварительных соображений предоставляется возможность перейти к рассмотрению конкретной задачи. При этом ограничимся таким случаем, в котором разрежение (давление) в уплотняемой бетонной смеси зависит только от одной координаты.

При изучении поля разрежения (давления) в уплотняемой бетонной смеси можно отметить следующее. Выражение

$$P_x = e^{+iq^2at}\psi(x) \qquad (13)$$

представляет собой частный интеграл уравнения вакуумной обработки бетонной смеси, если $\psi(x)$ – решение уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \left[\pm(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}q}\right]^2\psi = 0, \qquad (14)$$

где P_x – разрежение (давление) в уплотняемой бетонной смеси на расстоянии x от вакуум полости вакуум щита, т.е. $P_x = P$.

Таким решением является уравнение:

$$\psi(x) = Ce^{\pm\left[(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}q}\right]x}. \qquad (15)$$

Следовательно, для P получим выражение:

$$P_x = Ce^{-iq^2at}e^{\pm(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}qx} = Ce^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}qx}e^{-i\left(q^2at\pm\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right)}. \qquad (16)$$

С помощью формулы

$$e^{-i\varphi} = \cos\psi - i\sin\varphi$$

преобразуем это выражение к виду:

$$P_x = Ce^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}qx}\left[\cos\left(q^2at \pm \sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) - i\sin\left(q^2at \pm \sqrt{\frac{1}{2}}qx\right)\right]. \qquad (17)$$

Полученное комплексное решение можно разделить на действительную и мнимую части. В результате находим:

$$P_x = P_1 + i\,P_2\,. \qquad (18)$$

В соответствии со свойствами экспоненциальной функции положительный знак экспоненты означает, что по мере удаления от вакуум полости вакуум щита колебания разрежения (давления) должны возрастать. Такой вывод находится в явном противоречии с результатами экспериментов. Поэтому, по физическим соображениям можно во всех случаях отбросить верхний знак. Тогда остается два решения:

$$P_1 = C_1e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}qx}\cos\left(q^2at - \sqrt{\frac{1}{2}}qx\right)$$

и

$$P_2 = C_2e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}qx}\sin\left(q^2at - \sqrt{\frac{1}{2}}qx\right). \qquad (19)$$

Для определения произвольных постоянных C и q воспользуемся условиями на поверхности, полагая в обоих уравнениях $x = 0$.

Получим

$$P_o = C_1\cos(q^2at) \text{ или } P_o = C_2\sin(q^2at)\,. \qquad (20)$$

Сопоставляя эти выражения с условиями на поверхности (7), находим

$$C_1 = P_{ом} \quad \text{и} \quad C_2 = 0 \quad q^2 = \frac{1}{a} 2 \frac{\pi}{t_o} = \frac{2\pi}{at_o}. \tag{21}$$

Тогда уравнение поля давления (разрежения) примет вид:

$$P_x = P_{ом} e^{-x\sqrt{\pi/at_o}} \cdot \cos\left(x\sqrt{\frac{\pi}{at_o}} - \frac{2\pi}{t_o} t \right). \tag{22}$$

При обсуждении полученного результата можно принять две различные точки зрения. Во-первых, можно фиксировать определенный момент времени и исследовать вид поля разрежения (давления) в этот момент. Иначе говоря, можно получить мгновенную картину распределения разрежения (давления) по толщине уплотняемого слоя бетонной смеси. Во-вторых, можно рассматривать бесконечно тонкий слой в толщине уплотняемой бетонной смеси и исследовать те изменения во времени, которые претерпевает разрежение (давление) в этом слое.

Примем вначале первый метод рассмотрения и начнем при этом с простейшей функции:

$$f_1(x) = P_{ом} \cos\left(x\sqrt{\frac{\pi}{at_o}} \right). \tag{23}$$

Эта зависимость представляет собой уравнение волны и изображается косинусоидой. Наибольшее отклонение (максимальная амплитуда) равно $P_{ом}$. Полная длина волны определяется из уравнения:

$$x\sqrt{\frac{\pi}{at_o}} = 2\pi,$$

откуда для длины волны получаем:

$$\Lambda = 2\sqrt{\pi a t_o}.$$

Гребни волны находятся в точках $x_1 = 0$; $x_2 = 2\sqrt{\pi a t_o}$; $x_3 = 4\sqrt{\pi a t_o}$ и т.д.

Функция $$f_2(x) = P_{ом} \cos\left(x\sqrt{\frac{\pi}{at_o}} - 2\pi \frac{t}{t_o} \right) \tag{24}$$

представляет собой такую же волну, только при этом вся кривая смещена соответственно величине $2\pi t/t_o$ в направлении положительных x. Таким образом, при непрерывно возрастающем t вся кривая волны перемещается в

этом направлении и образуется семейство волн. Как хорошо известно из теории волн, скорость распространения равна длине волны, деленной на период колебания. Поэтому, скорость перемещения какой-нибудь точки волны, например точки максимума, равна:

$$\omega = \frac{2\sqrt{\pi a t_o}}{t_o} = 2\sqrt{\frac{\pi a}{t_o}} \ . \qquad (25)$$

Уравнение (22) отличается от рассмотренных здесь уравнений (23 и 24) только тем, что оно содержит множителем экспоненциальную функцию. Этот множитель не изменяет ни разности фаз, ни скорости распространения границы вакуумирования, ни длины волны, но обуславливает очень быстрое уменьшение наибольшего отклонения с возрастанием x .

Применим теперь второй метод рассмотрения, когда наблюдается изменение во времени разрежения (давления) на расстоянии x от вакуумполости вакуумщита. В этом случае следует принять x за постоянный параметр, а t – за переменную. При этом оказывается, что P_x – изменяется в зависимости от t также по закону косинуса. Период колебаний равен t_o и, таким образом, не зависит от глубины x . В противоположность этому фаза зависит от x : при возрастающих x происходит отставание по фазе (сдвиг фазы), которое определяется выражением:

$$t_x = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{t_o}{\pi a}} \ . \qquad (25)$$

На глубине $x = \sqrt{a\pi t_o}$ этот сдвиг равен $t_o/2$.

Максимальная амплитуда также изменяется в зависимости от x .

Ибо

$$P_{XM} = P_{ом} e^{-x\sqrt{\pi/at_o}} \ . \qquad (26)$$

Далее рассматривается задача: на какой глубине колебания разрежения (давления) уменьшатся до $\nu - й$ доли своего значения в вакуумполости вакуумщита.

Для ответа на этот вопрос следует решить уравнение [3]:

$$\frac{1}{\nu} = e^{-x\sqrt{\pi/at_o}} \qquad (27)$$

относительно x . Тогда

$$x = \sqrt{\frac{at_o}{\pi}} \ln \nu \ . \qquad (28)$$

Вводя вместо величины $\sqrt{at_o}$ длину волны $\Lambda = 2\sqrt{\pi a/t_o}$, получим

$$x = \frac{2\sqrt{\pi a t_o}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} \ln \nu = \Lambda \frac{\ln \nu}{2\pi} = \Lambda f(\nu) . \qquad (29)$$

В таблице 1 сведены численные значения функции $f(\nu)$ [3].

Таблица 1

Численные значения функции $f(\nu)$

$1/\nu$	1/2	1/4	1/10	1/20	1/50	1/100	1/1000
$f(\nu)$	0,110	0,221	0,367	0,477	0,623	0,733	1,100

Легко заметить, что длина волны, а вместе с ней и глубина проникновения волн разрежения (давления) будет тем больше, чем больше пьезопроводность и чем медленнее происходят колебания.

Выводы. С использованием функции комплексного переменного получено уравнение вакуумной обработки бетонной смеси, позволяющее определить закономерности распространения разрежения (давления) в уплотняемой смеси, уравнения волны и ее длину при гармонических колебаниях, изменение разрежения и амплитуду колебаний во времени в бесконечно тонком слое на заданной глубине. Эти зависимости имеют принципиальное значение для оптимального управления формованием бетонных и железобетонных конструкций.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сторожук, Н.А. Вибровакуумирование бетонных смесей и свойства вакуумбетона [Текст]: монография / Н.А. Сторожук. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 251 с.
2. Франк, Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики [Текст] / Ф. Франк, Р. Мизес. – М.-Л.: Глав. Редакция общетехн. л-ры, 1937. – 998 с.
3. Гребер, Г. Основы учения о теплообмене [Текст] / Г. Гребер, С. Эрк, У. Григуль. – М.: Издат. иностран. л-ры, 1958. – 556 с.
4. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, Н.Н. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
5. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.