УДК 539.3

ВРАХУВАННЯ ОРТОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ТОВСТИХ ОБОЛОНОК ПРОСТОРОВИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ СКІНЧЕННИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Пікуль А.В.
ТОВ "Ліра САПР"

В реальному будівництві використовують нетонкі пластини та оболонки (плитні фундаменти, підземні резервуари). Збільшення товщини таких елементів погіршує точність їх розрахунку в більшості програмних комплексів, де розрахунок базується на теорії тонких пластин і оболонок. Опорні та навантажуючі елементи, що часто розміщені по області пластин, створюють складний напружено-деформований стан з великими перепадами функції напруження по товщині пластини. Побудова співвідношень на основі гіпотез Кірхгофа-Лява не дає можливості врахувати всі напруження, що призводить до зростання похибки при розрахунку таких конструкцій.

В рамках написання дисертаційної роботи було виведено просторовий криволінійний скінченний елемент [5]. В даній статті наведено викладки для вдосконалення його врахуванням ортотропії для можливості застосування при розв'язуванні задач теорії пружності в фізично-нелінійній постановці.

Розглянемо об'ємний криволінійний скінченний елемент оболонки. В центрі скінченного елемента розміщуємо криволінійну систему координат x^1, x^2, x^3.

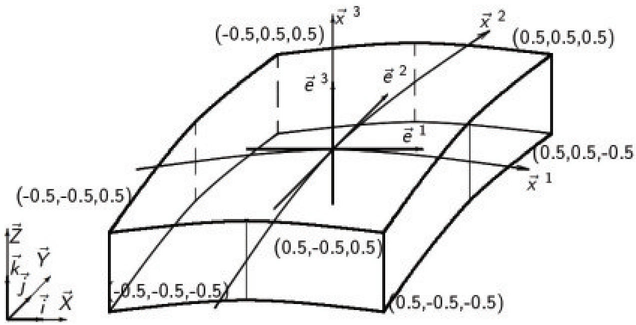

Рис.1: Просторовий СЕ в криволінійній системі координат

Таким чином контури СЕ знаходяться в межах від x^i=-0.5 до x^i=0.5. Отже розміри сторін визначаються коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні $\sqrt{g_{\text{ii}}}$, де $g_{\text{ij}} = \bar{e}_i \bar{e}_j$(i,j=α,β,γ) , а об'єм відповідає визначнику метричного тензора $\sqrt{G}$:

$$G = \det\|\vec{g}_{ij}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Серединна поверхня в декартовій системі координат XYZ описується функціями X=X(x^1,x^2,x^3), Y=Y(x^1,x^2,x^3), Z=Z(x^1,x^2,x^3).

Вектори, що описуються залежностями

$$\bar{e}_\alpha = \frac{\partial X}{\partial x^\alpha}\bar{\imath} + \frac{\partial Y}{\partial x^\alpha}\bar{\jmath} + \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha}\bar{k} (\alpha=1,2),$$

дотичні до координатних ліній x^1, x^2, x^3 і співпадають з напрямком зростання відповідних координат. Вектор $\vec{e}_3$ співпадає з ортом нормалі до серединної поверхні $\bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1\times\bar{e}_2}{|\bar{e}_1\times\bar{e}_2|} = \frac{\bar{e}_1\times\bar{e}_2}{\sqrt{g}}$

Ці вектори являють собою основний локальний базис точок серединної поверхі скінченного елемента оболонки.

Вектори взаємного базису пов'язані з векторами основного базису співвідношеннями

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2\times\bar{e}_3}{|\bar{e}_2\times\bar{e}_3|} = \frac{\bar{e}_2\times\bar{e}_3}{\sqrt{g}},$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3\times\bar{e}_1}{|\bar{e}_3\times\bar{e}_1|} = \frac{\bar{e}_3\times\bar{e}_1}{\sqrt{g}},$$

де g=det $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$.

Переміщення точок елемента оболонки описуються вектор-функцією координат серединної поверхні $\vec{u} = \vec{u}(x^1, x^2, x^3)$.

Коваріантні компоненти тензора деформацій визначаються диференціальними залежностями:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial x^\alpha}\bar{e}_\beta + \frac{\partial\bar{U}}{\partial x^\beta}\bar{e}_\alpha\right).$$

Для однорідного ізотропного матеріалу закон Гука мав такий вигляд

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu g^{\alpha\beta}g^{\gamma\omega} + (1-2\nu)g^{\alpha\gamma}g^{\beta\omega}\right]\varepsilon_{\gamma\omega},$$

де E – модуль пружності матеріалу, $\sigma^{\alpha\beta}$ – коваріантна компонента тензора напружень.

Для ортотропного матеріалу закон Гука набуває вигляду:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \left[E_{\alpha\beta\gamma\omega}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\omega} + E_{\alpha\gamma\beta\omega}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\omega}\right]\varepsilon_{\gamma\omega},$$

де всі $E_{\alpha\beta\gamma\omega} = 0$, окрім наведених нижче:

$$E_{1111} = E_1 \;\; E_{1122} = E_1 \cdot \nu_{12} \;\; E_{2211} = E_2 \cdot \nu_{21} \;\; E_{1212} = E_{2121} = G_{12}$$
$$E_{2222} = E_2 \;\; E_{2233} = E_2 \cdot \nu_{23} \;\; E_{3322} = E_3 \cdot \nu_{32} \;\; E_{2323} = E_{3232} = G_{23}$$
$$E_{3333} = E_3 \;\; E_{1133} = E_1 \cdot \nu_{13} \;\; E_{3311} = E_3 \cdot \nu_{31} \;\; E_{1313} = E_{3131} = G_{13}$$

Потенціальну енергію деформації записуємо у вигляді

$$Э=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5}\sigma^{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\sqrt{G}\mathrm{dx}^1\mathrm{dx}^2\mathrm{dx}^3.$$

Вектор-функцію переміщень апроксимуємо рядом Маклорена

$$\bar{U}(x^1,\mathrm{x}^2,\mathrm{x}^3) = \bar{U}^0 + \frac{\partial\bar{U}^0}{1!\,\partial x^\alpha}x^\alpha + \frac{\partial^2\bar{U}^0}{2!\,\partial x^\alpha\partial x^\beta}x^\alpha x^\beta + \frac{\partial^3\bar{U}^0}{3!\,\partial x^\alpha\partial x^\beta\partial x^\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma + \cdots$$

Отримуємо залежності для деформацій

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(U^0_{\alpha\vee\beta} + \mathrm{U}^0_{\beta\vee\alpha}U^0_{\alpha\vee\beta\gamma}x^\gamma + \mathrm{U}^0_{\beta\vee\alpha\omega}x^\omega + \frac{1}{2!}U^0_{\alpha\vee\beta\gamma\omega}x^\gamma x^\omega\right),$$

або в матричному вигляді $\{\varepsilon\} = [D_\varepsilon]\{\phi\}$, де $[D_\varepsilon]$ – матриця коефіцієнтів, що пов’язують деформації з набором коефіцієнтів апроксимуючого ряду переміщень $\{\varphi\}$:

Вектор вузлових переміщень:

$$\{U\} = \Big\{\mathrm{U}^0_1,\mathrm{U}^0_2,\mathrm{U}^0_1,\mathrm{U}^0_3,\mathrm{U}^0_{1|1},\mathrm{U}^0_{2|1},\mathrm{U}^0_{3|1},\mathrm{U}^0_{1|2},\mathrm{U}^0_{2|2},\mathrm{U}^0_{3|2},\mathrm{U}^0_{1|3},\mathrm{U}^0_{2|3},\mathrm{U}^0_{3|3},$$
$$\mathrm{U}^0_{1|12},\mathrm{U}^0_{2|12},\mathrm{U}^0_{3|12},\mathrm{U}^0_{1|13},\mathrm{U}^0_{2|13},\mathrm{U}^0_{3|13},\mathrm{U}^0_{1|23},\mathrm{U}^0_{2|23},\mathrm{U}^0_{3|23},\mathrm{U}^0_{1|123},\mathrm{U}^0_{2|123},\mathrm{U}^0_{3|123}\Big\}^T.$$

де символами «+» і «-» позначені величини +0,5 і -0,5 координат x^1, x^2, x^3.

$$\{U\} = \{U_1^{---},\mathrm{U}_2^{---},\mathrm{U}_3^{---},\mathrm{U}_1^{+--},\mathrm{U}_2^{+--},\mathrm{U}_3^{+--},\mathrm{U}_1^{-+-},\mathrm{U}_2^{-+-},\mathrm{U}_3^{-+-},\mathrm{U}_1^{++-},\mathrm{U}_2^{++-},\mathrm{U}_3^{++-},$$
$$\mathrm{U}_1^{--+},\mathrm{U}_2^{--+},\mathrm{U}_3^{--+},\mathrm{U}_1^{+-+},\mathrm{U}_2^{+-+},\mathrm{U}_3^{+-+},\mathrm{U}_1^{-++},\mathrm{U}_2^{-++},\mathrm{U}_3^{-++},\mathrm{U}_1^{+++},\mathrm{U}_2^{+++},\mathrm{U}_3^{+++}\}^T,$$

Пряма та зворотня залежності вектора вузлових переміщень і вектора коефіцієнтів апроксимуючого ряду визначаються матрицею $[P]$:

$$U_j^{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{U}_i \cdot a^i_{j\alpha\beta\gamma} + \mathrm{U}_{i\vee\alpha} \cdot a^i_{j\alpha\beta\gamma} \cdot \alpha + \frac{1}{2!}U_{i\vee\alpha\beta} \cdot a^i_{j\alpha\beta\gamma} \cdot \alpha\beta + \cdots$$
$$a^i_{j\alpha\beta\gamma} = \bar{e}^i(0,0,0) \cdot \bar{e}_j(\alpha,\beta,\gamma).$$

Компоненти матриці [P] визначаються з наступних співвідношень

$$\{U\} = [P]\{\varphi\},$$
$$\{\varphi\} = [P]^{-1}\{U\} = [S]\{U\}.$$

Потенціальна енергія елемента через вузлові переміщення визначається функціоналом

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5}\{U\}^T\,[S]^T\,[D_\varepsilon]^T\,[A][D_\varepsilon][S]\{U\}\sqrt{G}\mathrm{dx}^1\mathrm{dx}^2\mathrm{dx}^3 -$$
$$-\{U\}^T[F]-\{U\}^T[R],$$

де [A] – матриця пружних сталих матеріалу, [F] – вектор вузлових навантажень, [R] – вектор реакцій.

З умови стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії скінченного елемента $\delta\Pi=[K]\{U\}-[F]-[R]=0$, визначаємо вектор реакцій

$$[R]=[K]\{U\}-[F],$$

де [K] – матриця жорсткості, котра має наступний вигляд

$$[K]=\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{0.5}[S]^T\,[D_\varepsilon]^T[A][D_\varepsilon][S]\sqrt{G}\mathrm{dx}^1\mathrm{dx}^2\mathrm{dx}^3.$$

При розрахунку полiматеріальних конструкцій за допомогою МСЕ в фізично-нелінійній постановці, необхідно враховувати ортотропні властивості матеріалу конструкції. Особливо важливо враховувати зміну співвідношення жорсткісних характеристик матеріалу по різних напрямках в межах скінченного елемента при покроковому зростанні навантаження на конструкцію.

Отримані результати дозволяють виконувати розрахунки товстостінних полiматеріальних конструкцій (наприклад залізобетонних або бетонних, підсилених арматурою з полімерних матеріалів) за допомогою МСЕ в фізично-нелінійній постановці.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Блох В.И. Теория упругости — Х.: Изд-во Харьковск. Гос. Ун-та, 1964 — 438 с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа. 1966 — 256 с.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
4. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. — К.: Факт, 2007. — 394 с.
5. Гоцуляк Є.О., Пікуль А. В. Реалізація просторового скінченного елемента в криволінійній системі координат. — Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. — Вип.88 — К.:КНУБА, 2011. — с.120—125.
6. Кабриц С.А., Черных К.Ф. — Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.Петерб. Ун-та, 2002. — 388 с.