4. Березняков А.И. Уравнение интенсивности изнашивания узла трения при наличии частиц загрязнений в смазочном материале // Трение и износ, 17 (1996), №1, С. 43 – 48.

5. Goertz C.K. Dusty plasmas in the Solar system // Reviews of Geophysics, 27, 2 (May 1992), С. 271-272.

6. Березняков А. И., Венцель Е. С., Кравец А. М. О корреляции между триботехническими и электрическими параметрами узла трения // Трение и износ.–2003(24), №5, С. 469–476.

7. Громаковский Д.Г. Система понятий и структура моделей изнашивания//Трение и износ. 1997. Т.18. № 1. С. 53-62.

8. Венцель Е.С. Коефіцієнт протизношувальних властивостей як критерій визначення строків служби робочих рідин гідроприводів будівельних машин / Е.С. Венцель, О.В. Орел // Сб. научн. Тр. №57 – Днепропетровск: ПГАСА, 2010. – 290с.

УДК 534.1

В.С. ЛОВЕЙКІН, докт. техн. наук, Ю.В. ЧОВНЮК, канд. техн. наук.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

М. Г. ДІКТЕРУК, канд. техн. наук, К. І. ПОЧКА, канд. техн. наук.

Київський національний університет будівництва і архітектури

ФІЗИКО-МЕХАНІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МАТЕМАТИЧНЕ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САПР ВІБРОУДАРНИХ (СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ) МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Постановка проблеми. При дослідженні динаміки машин та механізмів, створенні фізико-механічних моделей, математичному та інформаційно-аналітичному забезпеченні САПР віброударних (суттєво нелінійних) механічних систем, як правило, слід мати справу з нелінійними коливними системами. Це пояснюється тим, що без врахування існуючих фізичних та геометричних нелінійностей не завжди можна визначити динамічні характеристики машини й правильно оцінити її міцність та надійність. Нелінійність пружних характеристик зустрічається у багатьох механізмах. Вона є причиною виникнення суб- та супергармонічних коливань, великих амплітуд коливань у нелінійних резонансних зонах при стаціонарних та перехідних режимах, багаторежимності на одній частоті вимушеної сили, віброударних режимів, паразитних нелінійних просторових коливань. У зв’язку з цим актуальним є прогнозування появи цих небажаних нелінійних режимів, котрі є небезпечними для машин і механізмів особливо у зв’язку зі значним зростанням їх швидкостей. З іншого боку, саме використання нелінійних ефектів, вказаних вище, дозволяє підвищити продуктивність вібромашин та проектувати якісно нові вібраційні пристрої для різноманітних технологічних процесів будівельної індустрії. (Безумовно, процес проектування вказаних пристроїв повинен супроводжуватись вдосконаленням існуючої та створенням нової бази математичного забезпечення САПР подібних систем).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нелінійні вібромашини знаходять все більш широке застосування у області вібропереміщення, віброущільнення, віброобробки, вібрbelieve зборки і т.д. В умовах розвитку вібраційної техніки для виробництва будівельних матеріалів актуальним виявився й розв’язок деяких питань синтезу нелінійних вібромашин із заздалегідь заданими параметрами руху й запасом стійкості [1].

Сучасні системи віброзахисту та вібротехніки, як правило, є суттєво нелінійними, тобто такими, у котрих нелінійності відновлюючих сил не є малими. Існує багато точних та наближених методів дослідження вказаних систем [1, 17].

Мета даної роботи полягає у вдосконаленні існуючих методів аналізу суб- та супергармонічних коливань суттєво нелінійних механічних систем, розгляді умов формування періодичних режимів у математичних моделях таких систем, а саме у суттєво нелінійних детермінованих коливних системах з одним ступенем вільності руху. Реалізація вказаної мети роботи дозволить також суттєво покращити й вдосконалити існуюче математичне забезпечення САПР розглядуваних механічних систем, які зараз широко використовуються у будівництві, будівельних технологіях та виробництві сучасних будівельних матеріалів. Основними методами, які застосовані у даній роботі при дослідженні локальних та глобальних задач формування періодичних режимів, є точні аналітичні й чисельні методи синтезу та аналізу нелінійних систем [1, 2]. Ці методи, не конкуруючи з добре розробленими наближеними аналітичними методами (метод малого параметра, асимптотичні методи та ін.), дозволяють відшукати точні закони руху, що відповідають різним періодичним режимам, і з’ясувати запас стійкості для систем з типовими пружними характеристиками.

Вибір об’єкту та методу досліджень пояснюється наступними обставинами. Сучасні системи віброзахисту і вібротехніки, як правило, є суттєво нелінійними, тобто такими, у котрих нелінійності відновлюючих сил не є малими. За допомогою точних методів дослідження можна більш обґрунтовано прогнозувати умови для існування бажаних чи, навпаки, паразитних (шкідливих) коливань, ніж за допомогою наближених методів. Тому автори даної роботи переслідують і наступні цілі:1) дослідити вимушені коливання у механічних системах із суттєво нелінійними пружними відновлюючими силами за допомогою точних аналітичних методів аналізу нелінійних систем; 2) всебічно й науково обґрунтовано описати основні характеристики вказаних систем, використовуючи при цьому наближені методи (наприклад, метод гармонічного балансу [2]); 3) дослідити режими вимушених (суб-/супергармонічних) коливань у суттєво нелінійних системах з в'язким тертям методом прямої лінеаризації Я.Г. Пановка [17]. При цьому можна отримати замкнену форму розв'язку при дії довільної періодичної сили [18].

Аналіз великої кількості точних розв'язків у нелінійних неавтономних коливних системах дозволяє стверджувати, що основні нелінійні ефекти у цих системах є проявом внутрішніх коливних властивостей системи, тобто її вільних коливань. (Цієї точки зору у різних ступенях притримуються й автори ряду робіт з нелінійних коливань [1, 3, 4, 5 та ін.], однак багато дослідників не враховують взаємні зв'язки вільних та вимушених резонансних коливань, що у багатьох випадках призводить до неточних якісних висновків, зроблених на основі результатів наближеного аналізу (наприклад, даних про залежність порядку можливих субгармонійних режимів від ступеня поліноміальної пружної характеристики й про неможливість існування парних субгармонійних режимів у симетричних системах [6] чи про незначну величину амплітуд супергармонійних коливань). Такий підхід передбачає, що у системах визначальну роль за наявності коливань відіграють пружні відновлюючі сили. Тому з'являється можливість на основі аналізу вільних коливань системи й параметрів вимушеної сили передбачати можливість тих чи інших нелінійних ефектів без звичайних математичних розрахунків.

Автори намагалися включити у дану роботу тільки ті результати досліджень нелінійних систем, котрі можна вважати як точні. Ця обставина, природно, звузила коло розглядуваних задач. (Що стосується аналізу стійкості тих чи інших режимів суб- та супергармонічних коливань, умов їх виникнення (порогових значень амплітуд), то тут взагалі застосовуються наближені методи аналізу). Однак, оскільки механічні коливні системи найчастіше є грубими системами (т.з. робастні системи), наявність точних еталонних рішень та побудова карт областей, що притягують періодичні режими систем з різноманітними типовими нелінійними характеристиками, дозволяють досить впевнено прогнозувати поведінку систем з іншими близькими нелінійностями, точні розв'язки для котрих невідомі.

У зв'язку із широким розповсюдженням наближених методів для дослідження нелінійних коливних систем, а також методів їх математичного моделювання на ПЕОМ та АОМ також існує проблема наявності відповідних еталонних розв'язків. Мабуть, отримані у даній роботі методом аналізу точні аналітичні розв'язки основних, суб- та супергармонічних режимів для систем з нелінійними гладкими та кусково-лінійними пружними характеристиками можуть знайти застосування у якості таких еталонних рішень.

Список літератури, наведений у статті, ні у якій мірі не претендує на повноту. Більш повний список літератури щодо різних аспектів нелінійної теорії можна знайти у [7, 8, 9].

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Аналіз основних властивостей суттєво нелінійних коливних систем.

При вивченні коливних процесів, що виникають у машинах та механізмах будівельної індустрії, як правило вдається виділити три групи сил, котрі визначають поведінку динамічної системи: 1) пружні відновлюючі; 2) дисипативні; 3) вимушені сили. За такого підходу рівняння руху коливної системи з одним ступенем вільності руху можна записати у вигляді [1]:

$$m\ddot{x} + f(x) + R(x, \dot{x}) = H(t), \qquad (1)$$

де x – узагальнена координата; m – маса; $f(x)$ – пружна відновлююча сила (пружна характеристика; $R(x, \dot{x})$ – дисипативна сила (дисипативна характеристика); $H(t)$ – періодичне зовнішнє збудження системи (вимушена сила) періоду T.

Слід зазначити, що під зовнішнім збудженням $H(t)$ у даній роботі розуміють детерміновані сили чи імпульси, діючі на розглядувану частину динамічної системи з боку неврахованої у математичній моделі іншої частини більш загальної динамічної системи. Зрозуміло, що адекватність математичної моделі (1) об'єкту, що вивчається, може бути забезпечена лише у тому випадку, якщо зворотнім впливом динаміки процесів моделі (1) на формування „зовнішніх" впливів можна буде знехтувати, що й передбачається у даній роботі. Інакше необхідним є більш повне врахування властивостей джерела енергії [7, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

У тих випадках, коли система (1) є лінійною, тобто $f(x) = p^2 x$ й $R(x, \dot{x}) = 2n\dot{x}$, у ній встановлюються періодичні коливання з періодом вимушеної сили $H(t)$. Причому задані параметри системи незалежно від початкових умов однозначно визначають параметри відповідного єдиного періодичного режиму. Ця однозначність, як правило, має місце й у системі (1) з лінійною пружною характеристикою і малою нелінійною дисипативною силою, тобто такою силою, котра за заданих параметрів інших сил не призводить у процесі коливань до скінчених у часі зупинок системи.

Значно більш складна ситуація спостерігається у системі з нелінійною пружною характеристикою відновлюючої сили. У цьому випадку у залежності від початкових умов при одних і тих самих параметрах системи (1) можливими є декілька стійких різних періодичних режимів як з періодом вимушеної сили, так і з кратними періодами. Ця багаторежимність є основною властивістю нелінійних систем. Вона, як і інші прояви нелінійності, визначається перш за все видом пружної характеристики $f(x)$. У даній роботі, крім того, розглядаються системи, суттєво нелінійні у тому сенсі, що нелінійна пружна характеристика відновлюючої сили може бути будь-якою кусково-неперервною функцією змінної x.

У нелінійній системі, у порівнянні з лінійною, поряд з розширенням кількості періодичних режимів можливою є й більша кількість резонансних частотних діапазонів, у яких розвиваються значні коливання з частотою вимушеної сили, а також з іншими більш високими чи низькими частотами.

Серед основних факторів, що впливають на формування періодичних режимів розглядуваних нелінійних систем слід виділити, на думку авторів роботи, наступні: 1) внутрішні коливні властивості; 2) зовнішні вимушені сили; 3) сили непружного опору (дисипативні сили); 4) початкові умови. Розглянемо їх детально.

Внутрішні коливні властивості. Нелінійні ефекти у коливних системах за своїм змістом є проявом внутрішніх коливних властивостей системи. У залежності від параметрів зовнішнього впливу і дисипативних сил внутрішні коливні властивості, обумовлені пружними відновлюючими силами, можуть проявлятись сильніше чи слабше, але основні особливості коливних процесів у нелінійній системі (1) визначаються її основною частиною, тобто автономною недисипативною системою:

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \,. \qquad (2)$$

при її вільних коливаннях. Саме вільні коливання характеризують внутрішні коливні властивості нелінійної системи, для котрої період та спектральний склад вільних коливань залежать від початкових умов. Вільні нелінійні коливання є негармонічними, й внесок окремих гармонічних складових при розкладі вільних коливань у ряд Фур’є для різних пружних характеристик $f(x)$ може суттєво відрізнятись. Якщо тепер до основної системи (2) прикласти невелику періодичну вимушену силу $H(t)$ й невелику дисипативну силу $R(x,\dot{x})$, то у такій системі можуть спостерігатись один чи декілька стійких періодичних режимів. Однак усі ці режими, як правило, виявляються близькими до відповідних вільних коливань основної системи.

Пружні характеристики $f(x)$ при відповідному масштабі відображають залежність між відтворюючою силою й змінною x. Основною характеристикою вільних коливань є її амплітудно-частотна залежність, графічне зображення котрої має назву „скелетної кривої”.

Зовнішні вимушені сили. При розрахунках коливань машин та механізмів найчастіше розглядають періодичні вимушені сили, або імпульси. У залежності від закону зміни вимушеної сили всі види зовнішнього періодичного збудження розділені на п’ять груп [1].

Основна роль зовнішніх вимушених сил при формуванні періодичних режимів у нелінійних системах полягає у підтримці вільних коливань системи з періодом, рівним, кратним чи дробовим відносно періоду вимушених сил.

Якісна поведінка нелінійних динамічних систем, що мають однакову основну складову (2) й знаходяться під впливом різних імпульсних чи неперервних зовнішніх сил $H(t)$, однакова, якщо різні види зовнішніх впливів мають однакові властивості симетрії, тобто належать до однієї з класифікаційних груп. (Під якісною поведінкою тут розуміють кількість та вид можливих періодичних режимів). У ряді випадків має місце кількісне співпадіння результатів дослідження за відповідного вибору параметрів зовнішніх сил, наприклад, при дослідженні суб- та супергармонічних режимів. Тому у таких випадках при визначенні числа й виду періодичних режимів, оцінки їх стійкості можлива заміна одного виду зовнішнього впливу іншим з метою спрощення математичної сторони дослідження динаміки коливних систем.

Зазначена вище інваріантність якісної поведінки розглядуваних коливних систем, що мають узагальнені властивості симетрії вимушених сил, від конкретного виду цих сил свідчить про визначальну роль внутрішніх факторів.

Сили непружного опору (дисипативні сили). Роль дисипативних сил у формуванні періодичних коливань у нелінійних системах, як правило, полягає у тому, що вони у певній мірі зменшують прояв внутрішніх коливних властивостей системи.

Зупинимось на впливі дисипативних сил на суб- та супергармонічні режими. Прийнято вважати, що невелика дисипація призводить до загибелі субгармонічних режимів. Однак це твердження є справедливим лише у тих випадках, коли субгармонічні режими мають малі області протягування й, відповідно, невеликий запас стійкості. Багато субгармонічних режимів з великими областями, які притягують, можливі за достатньо великої дисипації, а само-збуджувані субгармонічні режими можуть існувати й при досить великих дисипативних силах.

У нелінійних системах дисипативні сили на супергармонічні режими впливають, мабуть, слабше, ніж на субгармонічні. Як правило, й при значній дисипації супергармонічний характер законів руху у відповідних резонансних зонах зберігається для системи як з одним, так й з декількома ступенями вільності руху.

Початкові умови. Внутрішні коливні властивості й зовнішній вплив характеризують можливість прояву у нелінійних системах різноманітних періодичних режимів. Який з цих режимів буде реалізований у дійсності, залежить від початкового стану системи. Для неавтономної системи з одним ступенем вільності руху початковий стан характеризується трьома числами (x_0, $\dot{x}_0$ та t_0), котрі називаються початковими значеннями. Початковий стан може бути заданий також початковими умовами $x(t_0) = x_0$ та $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

Слід зазначити, що початкові значення тільки фазових координат й швидкостей не можуть однозначно визначити початковий стан системи, тобто за однакових значень x_0 та $\dot{x}_0$, а також різних значень часу t_0 можлива реалізація різних режимів. Початкове значення фазової координати t_0 характеризує початкову фазу зовнішнього впливу, і тому слід задати початкове значення t_0. Ця обставина є суттєвою (значущою).

Багаторежимність. Суб- та супергармонічні коливання. Велика роль початкових умов у нелінійних системах порівняно з лінійними пояснюється багаторежимністю нелінійних систем, тобто існуванням у залежності від початкових умов кількох різних періодичних режимів за одного й того ж зовнішнього впливу.

Для нелінійних систем типу (1) багаторежимність проявляє себе перш за все у зоні скелетної кривої (зоні основного чи головного резонансу) за вимушених коливань з частотою вимушеної сили (основні коливання).

Звичайна побудова амплітудно-частотних кривих вимушених коливань ($|a| = f(\omega)$) не дає уяви про фазу вимушеної сили. Більш повну інформацію, котру можна використати для побудови областей, що притягують періодичні режими, дають амплітудно-частотні криві, побудовані з урахуванням знаку „амплітуди” ($a = \tilde{f}(\omega)$). У цьому випадку стійким гілкам відповідають ділянки, які мають додатній нахил, а саме: $\partial a / \partial \omega > 0$; нестійким – ділянки амплітудно-частотних кривих, що мають від’ємний нахил, тобто: $\partial a / \partial \omega < 0$.

Амплітудно-частотні криві дають якісно правильну інформацію про кількість режимів та їх „амплітуду” коливань лише у випадку їх близькості до скелетних кривих, тобто до вільних коливань. У тих випадках, коли закон руху носить супергармонічний характер, тобто у розкладі $x(t)$ мають місце суттєво вищі гармонічні складові, період котрих у ціле число разів менше періоду вимушеної сили, амплітудно-частотні криві не дають правильної інформації про максимальні значення координат. (У подальшому супергармонічними коливаннями будемо називати такі коливання, закон руху котрих має більше двох екстремумів за період).

У нелінійних системах багаторежимність проявляє себе також у вигляді субгармонічних коливань у відповідних частотних діапазонах. Кількість цих режимів для симетричних систем ($f(x) = f(-x)$) залежить від розміщення скелетної кривої й параметрів вимушеної сили.

Суб- та супергармонічні коливання формуються на основі вільних коливань системи, котрі підтримуються зовнішньою вимушеною силою.

Необхідні умови існування цих коливань у симетричних системах знайдені у [15; 16]. Вони можуть бути зведені до наступних:

1. Якщо n періодів малої вимушеної сили періоду T_ω приблизно співпадають з m періодами вільних коливань, тобто якщо приблизно виконується співвідношення:

$$n \cdot T_\omega = m \cdot T; \quad (m, n) \in N, \tag{3}$$

або:

$$\frac{\omega}{n} = \frac{p}{m}, \tag{4}$$

де $\omega = \dfrac{2\pi}{T_\omega}$, $p = \dfrac{2\pi}{T}$ і, відповідно, частота вимушеної сили й власних коливань системи, тоді у нелінійній коливній системі можливі різні суб- чи супергармонічні коливання чи коливання порядку m/n (бо, виходячи з (4), $p = \dfrac{\omega \cdot m}{n}$), або виникають режими порядку m/n. При $m=1$ – це субгармонічні коливання порядку $1/n$, при $n=1$, $m \ge 2$ – супергармонічні.

2. Необхідні умови існування коливань порядку m/n у симетричних системах визначаються скелетною кривою. Якщо частота вільних коливань лежить у інтервалі (ω_0, ω_1), то необхідною умовою існування режиму порядку m/n є умова:

$$\frac{n}{m} \cdot \omega_0 \le \omega \le \frac{n}{m} \cdot \omega_1, \quad (n, m) \in N. \tag{5}$$

Слід зазначити, що на одній частоті вимушеної сили ω може одразу співіснувати декілька різних періодичних режимів.

2. Метод розрахунку періодичних рухів (суб- та супергармонічних коливань) у суттєво нелінійних коливних системах.

Розглянемо рівняння нелінійної неконсервативної системи, яке описує вимушені коливання у ній за наявності довільної у часі $\widetilde{F}(t)$ вимушеної сили, в’язкого тертя та кусково-лінійної пружної характеристики $\widetilde{f}(x)$:

$$m\ddot{x} + \widetilde{\alpha}\dot{x} + \widetilde{f}(x) = \widetilde{F}(t). \tag{6}$$

Рівняння (6) можна подати у вигляді:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + f(x) = F(t); \quad \alpha = \frac{\widetilde{\alpha}}{m}; \quad f(x) = \frac{\widetilde{f}(x)}{m}; \quad F(t) = \frac{\widetilde{F}(t)}{m}. \tag{7}$$

Використовуючи підхід [1, 2], можна знайти рівняння скелетної кривої системи, тобто залежність $\omega_* = \omega_*(A)$, де ω_* – власна частота коливань нелінійної системи, яка залежить від амплітуди A (коливань). Якщо використати метод [2], то для окремих видів кусково-лінійних пружних характеристик залежність $\omega_*(A)$ можна встановити точно. (Зокрема, це твердження прийнятне для білінійної та трьохланцюгової кусково-лінійних пружних характеристик (симетричних та несиметричних)).

Будемо розшукувати розв’язок (7) у вигляді:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \cos\{k\omega_* t\} + \sum_{k=1`}^{\infty} B_k \cdot \sin\{k\omega_* t\}. \tag{8}$$

Виходячи з (8), легко знайти $\dot{x}(t)$ та $\ddot{x}(t)$. Підставляємо $x(t)$, $\dot{x}(t)$ та $\ddot{x}(t)$ у (7). Тоді $(2k+1)$-рівнянь для визначення A_0, A_k, B_k можна знайти, помножаючи (7) на $\cos(k'\omega_* t)$ (або на $\sin(\widetilde{k}'\omega_* t)$), та інтегруючи праву й ліву частини вказаного рівняння по часу t у межах одного періоду вільних коливань нелінійної системи, тобто $2\pi/\omega_*$. (При цьому $k'=0,1,2,...$; $\tilde{k}'=1,2,3,....$). Тоді отримаємо такі рівняння:

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega_*} f(x)dt = \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F(t)dt; \tag{9}$$

$$\left\{-(k\omega_*)^2 A_k + \alpha(k\omega_*)B_k\right\}\cdot\frac{\pi}{\omega_*} + \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} f(x)\cos(k\omega_* t)dt = \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F(t)\cdot\cos(k\omega_* t)dt; \tag{10}$$

$$\left\{-(k\omega_*)^2 B_k - \alpha(k\omega_*)A_k\right\}\cdot\frac{\pi}{\omega_*} + \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} f(x)\sin(k\omega_* t)dt = \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F(t)\cdot\sin(k\omega_* t)dt. \tag{11}$$

Автор [2] визначає A_0, A_k, B_k методом гармонічного балансу наближено. Вважаючи вплив в'язкого тертя незначним, у порівнянні з іншими складовими рівняння (7), можна визначені (A_0, A_k, B_k) – амплітуди у [2] підставити у точні рівняння (9)-(11). Тоді отримаємо наближені рівняння для визначення (A_k, B_k), $k \in N$. (Точне рівняння (9) при цьому залиша-ється без змін). Останні набувають наступного вигляду:

$$\begin{cases} \alpha k\pi B_k = \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F(t)\cos(k\omega_* t)dt; \\ -\alpha k\pi A_k = \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F(t)\sin(k\omega_* t)dt, \quad k \in N. \end{cases} \tag{12}$$

Будемо розшукувати розв'язки системи рівнянь (12), подаючи $F(t)$ у вигляді:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{cj}\cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} F_{sj}\sin(j\omega t); \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{13}$$

де T – період вимушеної сили $F(t)$, тобто $F(t+T)=F(t)$. Використовуючи (12) та (13), отримаємо для режиму $\omega_* = \omega\cdot\frac{m}{k}$, $j \equiv m$:

$$\begin{cases} \alpha k\pi B_k \approx \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F_{cj}\cos(j\omega t)\cdot\cos(k\omega_* t) = F_{cm}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_*} = F_{cm}\cdot\frac{\pi}{\omega_*}; \\ -\alpha k\pi A_k \approx \int\limits_0^{2\pi/\omega_*} F_{sj}\sin(j\omega t)\cdot\sin(k\omega_* t) = F_{sm}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_*} = F_{sm}\cdot\frac{\pi}{\omega_*}. \end{cases} \tag{14}$$

Або:

$$B_k \approx \frac{F_{cm}}{\alpha k\omega_*}; \qquad A_k \approx -\frac{F_{sm}}{\alpha k\omega_*}. \tag{15}$$

Вважаючи, що у (15) для наближених значень $|B_k|$: $\omega_* \approx \omega_*(|B_k|)$, а для $|A_k|$: $\omega_* \approx \omega_*(|A_k|)$, тобто у залежності $\omega_*(A)$ врахована лише основна амплітуда ($k-a$) режиму

$\frac{m}{k}$, яка характеризує внесок у зазначений режим коливань власне самої нелінійної системи, можна отримати достатні умови наявності суб- та супергармонічних коливань у розглядуваній системі (а саме пороги, які треба здолати, щоб виникали відповідні типи коливань системи):

$$\begin{cases} \omega_*(|B_k|)\cdot|B_k| \geq \dfrac{|F_{cm}|}{\alpha k}; \\ \omega_*(|A_k|)\cdot|A_k| \geq \dfrac{|F_{sm}|}{\alpha k}. \end{cases} \tag{16}$$

З нерівностей системи (16) випливає, що порогові значення амплітуд субгармонічних коливань (порядку $\frac{1}{k}$) при $m=1$, $k \geq 2$ визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} \left[\omega_*(|B_k|)\cdot|B_k|\right]_{порог} \geq \dfrac{|F_{c1}|}{\alpha k} \approx \dfrac{\omega}{2\alpha^2 k^3}; \\ \left[\omega_*(|A_k|)\cdot|A_k|\right]_{порог} \geq \dfrac{|F_{s1}|}{\alpha k} \approx \dfrac{\omega}{2\alpha^2 k^3}, \end{cases} \tag{17}$$

де врахований динамічний коефіцієнт системи (за наявного в'язкого тертя).

Для супергармонічних коливань (m -го порядку) при $m \geq 2$, $k=1$ маємо:

$$\begin{cases} \left[\omega_*(|B_k|)\cdot|B_k|\right]_{порог} \geq \dfrac{|F_{cm}|}{\alpha} \approx \dfrac{m\omega}{2\alpha^2}; \\ \left[\omega_*(|A_k|)\cdot|A_k|\right]_{порог} \geq \dfrac{|F_{sm}|}{\alpha} \approx \dfrac{m\omega}{2\alpha^2}. \end{cases} \tag{18}$$

(Знову використані міркування щодо динамічного коефіцієнту системи, як у (17)).

У найбільш загальному випадку, для режиму $\frac{m}{k}$ ($\omega_* = \omega \cdot \frac{m}{k}$) матимемо:

$$\begin{Bmatrix} \omega_*(|B_k|)\cdot|B_k| \\ \omega_*(|A_k|)\cdot|A_k| \end{Bmatrix}_{порог} \geq \begin{Bmatrix} \dfrac{|F_{cm}|}{\alpha k} \\ \dfrac{|F_{sm}|}{\alpha k} \end{Bmatrix} \approx \frac{m\omega}{2\alpha^2 k^3}. \tag{19}$$

Отже, як випливає з (17)-(19):

1) при зростанні m поріг супергармонічних коливань збільшується (їх тяжче збуджувати у системі; поріг таких коливань $\sim m^1$);

2) при зростанні k поріг субгармонічних коливань зменшується (їх легше збуджувати у системі; поріг таких коливань $\sim \frac{1}{k^3}$);

3) при зменшенні коефіцієнту в'язкого тертя α поріг як суб-, так і супергармонічних коливань зростає $\sim \frac{1}{\alpha^2}$. Фізична причина цього зростання полягає у тому, що тяжче збуджувати будь-які коливання у нелінійній системі, бо немає (або їх дуже мало/недостатньо) центрів поглинання енергії, яка надходить у систему ззовні від вимушеної сили, що дає змогу задіяти у процес складних коливань системи її власні вільні коливання. Адже основні нелінійні ефекти (у т.ч. режими коливань $\frac{m}{k}$-порядку) у нелінійних системах розглядуваного типу є саме проявом внутрішніх коливних властивостей системи, тобто її вільних коливань [1].

3. Процедура прямої лінеаризації (за Я.Г. Пановко [17]) для систем з аналітичними пружними характеристиками.

У роботі [1] отримані точні співвідношення для частоти вільних коливань нелінійної системи (p). Однак, існує досить багато наближених методів відшукання частот вільних коливань у подібних системах, заснованих на лінеаризації пружних характеристик. У цьому пункті роботи розглянутий спосіб прямої лінеаризації, запропонований Я.Г. Пановком [17]. Цей спосіб визначення залежності $p(a)$ (де a – амплітуда вільних коливань) за значної простоти має, крім того, ще й високу точність. У ряді випадків точність способу прямої лінеаризації перевищує точність найбільш розповсюдженого методу гармонічної лінеаризації [4, 16].

Згідно способу прямої лінеаризації [17], частота вільних коливань для симетричної системи (тобто $f(x) \equiv -f(-x)$) визначається з виразу:

$$p^2 = \frac{5}{a^5}\int_0^a f(x)\cdot x^3 dx\,; \tag{20}$$

для несиметричної (тобто $f(x) \neq -f(-x)$) визначається з виразу:

$$p^2 = \frac{5}{2a^5}\int_{-a}^{a} f(x_1 - \Delta a)\cdot x_1{}^3 dx_1\,, \tag{21}$$

де

$$\Delta a = (a_2 - a_1)/2\,, \qquad a = (a_1 + a_2)/2\,. \tag{22}$$

Тут $a_{1,2} = \max a$; $a_1 = \max a$ при $x > 0$; $a_2 = \max a$ при $x < 0$.

Розглянемо декілька прикладів визначення частоти вільних коливань для зазначених нижче пружних характеристик $f(x)$.

А. Система з білінійною пружною характеристикою.

Пружна характеристика має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} {p_1}^2 x, & x\le\Delta; \\ {p_2}^2 x-({p_2}^2-{p_1}^2)\cdot\Delta, & x>\Delta. \end{cases} \tag{23}$$

Б. Система з несиметричною трьохланцюговою пружною характеристикою.

Пружна характеристика має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} {p_2}^2 x-({p_2}^2-{p_1}^2)\cdot\Delta_1, \ x\ge\Delta_1; \\ {p_1}^2 x, \ -\Delta_2\le x\le\Delta_1; \\ {p_3}^2 x+({p_3}^2-{p_1}^2)\cdot\Delta_2, \ x\le\Delta_2. \end{cases} \tag{24}$$

(Зокрема, може бути ${p_3}^2={p_2}^2$).

В. Система з трьохланцюговою пружною симетричною характеристикою.

Пружна характеристика має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} {p_1}^2 x, \ |x|\le\Delta; \\ {p_2}^2 x-({p_2}^2-{p_1}^2)\cdot\Delta\cdot signx, \ |x|\ge\Delta. \end{cases} \tag{25}$$

Для системи (24) при ${p_3}^2={p_2}^2$ та для системи (25) при $a\ge\Delta$ у [1] отримані розв'язки, які зводяться до наступних:

$$(24)\ \Rightarrow\ p^2={p_2}^2+\frac{\left({p_2}^2-{p_1}^2\right)}{8}\cdot\left\{(\gamma_1-\gamma)^5-(\gamma_2-\gamma)^5-5(\gamma_1-\gamma_5)\right\}, \tag{24*}$$

де
$$\gamma=\frac{\Delta a}{a}=\frac{a_2-a_1}{2a};\quad \gamma_1=\frac{\Delta_1}{a};\quad \gamma_2=\frac{\Delta_2}{a};\quad a=\frac{(a_1+a_2)}{2}. \tag{26}$$

$$(25)\ \Rightarrow\ p^2={p_2}^2+\frac{1}{4}\cdot\left({p_2}^2-{p_1}^2\right)\cdot\left(\frac{\Delta^5}{a^5}-5\cdot\frac{\Delta}{a}\right). \tag{27}$$

Для $f(x)$ (23) та $f(x)$ (24) (при ${p_3}^2\ne{p_2}^2$) вирази для p отримані нижче.

$$(23)\Rightarrow\ p^2=\frac{\left({p_1}^2+{p_2}^2\right)}{2}+\frac{\Delta^5}{2a^5}\cdot\left({p_1}^2-{p_2}^2\right)+\frac{5}{2a^5}\cdot\left\{\begin{matrix}\dfrac{{p_1}^2\cdot\Delta a}{4}\cdot\left(a^4-\Delta^4\right)-\dfrac{{p_2}^2\cdot a^4}{4}\cdot(\Delta a+\Delta)+ \\ +\dfrac{{p_1}^2\cdot\Delta\cdot a^4}{4}+\dfrac{{p_2}^2\cdot\Delta a\cdot\Delta^4}{4}+\dfrac{\left({p_2}^2-{p_1}^2\right)\cdot\Delta^5}{4}\end{matrix}\right\}; \tag{28}$$

$$(24)\Rightarrow\ p^2=\frac{5}{2a^5}\cdot\left\{\begin{matrix}\dfrac{{p_1}^2\cdot\left({\Delta_1}^5+{\Delta_2}^5\right)}{5}-\dfrac{{p_1}^2\cdot\Delta a}{4}\cdot\left({\Delta_1}^4-{\Delta_2}^4\right)+\dfrac{{p_2}^2\cdot\left(a^5-{\Delta_1}^5\right)}{5}- \\ -\dfrac{{p_2}^2\cdot(\Delta a)\cdot\left(a^4-{\Delta_1}^4\right)}{4}+\dfrac{\left({p_1}^2-{p_2}^2\right)\cdot\Delta_1\cdot\left(a^4-{\Delta_1}^4\right)}{4}+\dfrac{{p_3}^2\cdot\left(-{\Delta_2}^5+a^5\right)}{5}- \\ -\dfrac{{p_3}^2\cdot\Delta a\cdot\left({\Delta_2}^4-a^4\right)}{4}+\left({p_3}^2-{p_1}^2\right)\cdot\Delta_2\cdot\dfrac{\left({\Delta_2}^4-a^4\right)}{4}\end{matrix}\right\}. \tag{29}$$

У (29) вважаємо, що ${p_3}^2\ne{p_2}^2$.

4. Замкнена форма розв'язку при дії довільної періодичної сили.

Якщо врахувати в'язкий опір, то основне рівняння вимушених коливань прийме вид:

$$\ddot{x}+\frac{2\widetilde{n}}{m}\cdot\dot{x}+\frac{\widetilde{p}^2}{m}\cdot x=\frac{H(t)}{m}. \tag{30}$$

Введемо позначення:

$$\frac{2\widetilde{n}}{m}=2n\,; \qquad \frac{\widetilde{p}^2}{m}=p^2. \tag{31}$$

Використаємо підхід [18] та визначимо $x(t)$ для рівняння (30), яке справедливе на проміжку часу $0<t<T$, де T – період дії вимушеної сили $H(t)$ з довільним законом зміни у часі t. Маємо наступну структуру розв'язку:

$$x(t)=\frac{\exp(-nt)}{mp_*}\cdot\left\{\frac{C\cdot\left[e^{nT}\sin p_*(t+T)-\sin p_*t\right]-S\cdot\left[e^{nT}\cos p_*(t+T)-\cos p_*t\right]}{1-2e^{nT}\cos p_*T+e^{2nT}}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t H(\tau)e^{nT}\sin p_*(t-\tau)d\tau\right\}, \tag{32}$$

$$0<t<T\,; \qquad p_*=\sqrt{p^2-n^2}\,; \qquad C=\int_0^T H(\tau)e^{n\tau}\sin p_*\tau d\tau\,; \qquad S=\int_0^T H(\tau)e^{n\tau}\sin p_*\tau d\tau.$$

У випадку суперрезонансних режимів, коли виконується умова:

$$T=r\cdot T_*=\frac{2\pi\cdot r}{p_*}; \qquad r\in N; \qquad \omega=\frac{p_*}{r}; \qquad p_*=\omega\cdot r\,; \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{33}$$

За умов (33) $\sin p_*T=0$; $\cos p_*T=1$ тоді з (32) маємо:

$$x(t)=\frac{\exp(-nt)}{m\cdot\omega\cdot r}\cdot\left\{\frac{C\left[e^{nT}-1\right]\cdot\sin(p_*t)-S\left[e^{nT}-1\right]\cdot\cos(p_*t)}{\left(e^{nT}-1\right)^2}+\int_0^t H(\tau)\cdot e^{nT}\sin\{p_*(t-\tau)\}d\tau\right\}=$$

$$=\frac{e^{-nt}}{m\cdot\omega\cdot r}\cdot\left\{\frac{C\sin(p_*t)-S\cos(p_*t)}{e^{nT}-1}+\int_0^t H(\tau)\cdot e^{nT}\cdot\sin\{p_*(t-\tau\}d\tau\right\}. \tag{34}$$

З (34) випливає, що амплітуда $x(t)$ у випадку „суперрезонансних умов" (33) зменшується при зростанні r.

У випадку субрезонансних режимів виконується умова:

$$T=\frac{T_*}{\widetilde{m}}=\frac{2\pi}{p_*\widetilde{m}}; \qquad \frac{\omega}{\widetilde{m}}=p_*\,; \qquad \widetilde{m}\in N; \qquad p_*T=\frac{2\pi}{\widetilde{m}}. \tag{35}$$

З (32) за умов (35) випливає:

$$x(t)=\frac{e^{-nt}\cdot\widetilde{m}}{m\cdot\omega}\cdot\left\{\frac{C\left[e^{nT}\sin p_*(t+T)-\sin p_*t\right]-S\left[e^{nT}\cos p_*(t+T)-\cos p_*t\right]}{1-2e^{nT}\cos\left(\frac{2\pi}{\widetilde{m}}\right)+e^{2nT}}+\int_0^t H(\tau)e^{nT}\sin p_*(t-\tau)d\tau\right\}. \tag{36}$$

З (36) видно, що амплітуда $x(t)$ у випадку „субрезонансних умов” (35) зростає при зростанні $\widetilde{m}$.

Якщо існує резонанс $\frac{r}{\widetilde{m}}$-порядку, тобто:

$$p_* = \frac{\omega \cdot r}{\widetilde{m}}, \tag{37}$$

тоді для $x(t)$ маємо:

$$x(t) = \frac{e^{-nt} \cdot \widetilde{m}}{m \cdot \omega \cdot r} \cdot \left\{ \frac{C\left[e^{nT} \sin p_*(t+T) - \sin p_* t\right] - S\left[e^{nT} \cos p_*(t+T) - \cos p_* t\right]}{1 - 2e^{nT} \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{\widetilde{m}}\right) + e^{2nT}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t H(\tau) \cdot e^{nT} \cdot \sin\{p_*(t-\tau) d\tau\} \right\}. \tag{38}$$

Отже, за наявності резонансу $\frac{r}{\widetilde{m}}$-порядку, амплітуда $x(t)$ буде $\sim \frac{\widetilde{m}}{r}$.

Висновки.

1. Виконаний детальний аналіз основних властивостей суттєво нелінійних коливних систем дозволяє встановити основні параметри суб- та супергармонічних коливань (режимів $\frac{m}{k}$-порядку), необхідні та достатні умови їх збудження (обмеження на частотний інтервал збудження та пороги по амплітудам коливань).

2. Встановлені точні й наближені рівняння, які дозволяють визначати амплітуди коливань нелінійних систем із заданою скелетною кривою.

3. Застосування способу прямої лінеаризації Я.Г. Пановка дозволяє визначити власні частоти коливань суттєво нелінійних систем, які мають білінійну та триланцюгову (симетричну/несиметричну) пружну характеристику.

4. Встановлені закони руху системи $x(t)$ за умов суб- та супергармонічних резонансів у лінійних системах з в’язким тертям та довільною періодичною (з періодом T) вимушеною силою. Амплітуди резонансів $\frac{r}{\widetilde{m}}$-порядку прямо пропорційні $\frac{\widetilde{m}}{r}$.

5. Вказаний підхід та знайдені залежності можуть бути використані для вдосконалення та уточнення існуючих інженерних методів аналізу нелінійних віброударних систем, які використовуються у сучасних технологіях виробництва будівельних матеріалів та ущільнення різноманітних сумішей для потреб будівельної індустрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Закржевский М.В. Колебания существенно нелинейных механических систем. / М.В. Закржевский. – Рига: Зинатне, 1980. – 190 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
5. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем. / М.З. Коловский. – М.: Наука, 1966. – 318 с.
6. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
7. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. / И.И. Блехман. – М.: Наука, 1971. – 894 с.
8. Ганиев Р.Ф. Колебания твердых тел. / Р.Ф. Ганиев, В.О. Кононенко. – М.: Наука, 1976. – 432с.
9. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. / Ю.И. Неймарк. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
10. Блехман И.И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – К.: Наукова думка, 1976. – 269 с.
11. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов. / В.Л. Вейц. – Л.: Машиностроение, 1969. – 368 с.
12. Кононенко В.О. Колебания систем с ограниченным возбуждением. / В.О. Кононенко. – М.: Наука, 1964. – 254 с.
13. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. / Г.И. Мельников. – Л.: Машиностроение, 1975. – 200 с.
14. Фролов К.В. Колебания машин с ограниченной мощностью источника энергии и переменными параметрами. / К.В. Фролов. – В кн.: Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. – М.: Наука, 1972. – С. 2-17.
15. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов с двигателем внутреннего сгорания. / В.Л. Вейц, А.Е. Кочура. – Л.: Машиностроение, 1976. – 384 с.

16. Вульфсон И.И. Нелинейные задачи динамики машин. / И.И. Вульфсон, М.З. Коловс-кий. – Л.: Машиностроение, 1968. – 382 с.

17. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.

18. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. / Я.Г. Пановко. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.

УДК 534.1

В. С. ЛОВЕЙКІН, докт. техн. наук, Ю. РОМАСЕВИЧ, канд. техн. наук.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ОБҐРУНТУВАННЯ ВВЕДЕННЯ МОДИФІКОВАНОГО ОБМЕЖЕННЯ НА ФУНКЦІЮ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Постановка проблеми. Робота сучасних технічних систем супроводжується значними динамічними навантаженнями, швидкоплинними перехідними процесами та значними енергетичними витратами на виконання технологічних процесів. Вимоги, які ставляться до виробничих машин різного роду суперечливі: з одного боку необхідно забезпечити найбільшу ефективність виробництва, а з іншого - зберегти наявне обладнання та не допустити його передчасний вихід з ладу. Одним зі способів підвищення ефективності виробництва є його інтенсифікація, яка може бути реалізована шляхом зменшення тривалості циклів руху машин і механізмів. Як відомо, оптимальне за швидкодією керування має характер релейної функції [1]. Реалізація такого керування на практиці полягає у миттєвому перемиканні знаку керуючої функції, що підвищує динамічні навантаження у механічних елементах системи та зменшує їх надійність, а також збільшує струмові навантаження електроприводу системи. Для того, щоб усунути критичні динамічні навантаження у механічних частинах системи та протікання великих струмів у електроприводі необхідно вводити модифіковані (некласичні) обмеження на функцію керування.

Аналіз публікацій. Розвиток теорії оптимального керування почався у 50-х роках минулого сторіччя, а в наш час вона є досить гарно розробленою. Саме на початковому етапі її розвитку були поставлені і розв’язані деякі нетипові для варіаційного числення задачі. Однією з них є задача оптимальної швидкодії [1]. Сутність цієї задачі полягає у переводі матеріальної точки з одного стану у інший за мінімальний час при врахуванні обмежень на керування. Накладення обмежень на керування та фазові координати є типовим елеме-