организация и геодезическое обеспечение строительства. – Макеевка: ДонНАСА, 2005. – С. 82 - 85.

4. Пенчук В.А. К вопросу об эффективности распределения противогололедных материалов метательным диском / В.А. Пенчук, В.Н. Гусаков, А.В. Диденко // Инновации в науке – инновации в образовании: материалы Международной научно-технической конференции "Интерстроймех - 2013", 1-2 октября 2013 г. – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2013. – С. 274-277.

**УДК 534.1+621.019**

**В. С. ЛОВЕЙКИН, докт. техн. наук, Ю. В. Човнюк, канд. техн. наук**

*Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины*

# ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЁЖНОСТИ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ (КРАНОВ)/ВИБРОИЗОЛИРОВАННЫХ ФУНДАМЕНТОВ ПОД МАШИНЫ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ЗАКОНОМ ВЕЙБУЛЛА

**Постановка задачи. Обзор литературы.** При выборе номенклатуры и оценке показателей надёжности промышленных машин (ПМ) пользуются системой критериев, позволяющих получить характеристику, отражающую основные свойства надёжности машин, проявляющиеся при эксплуатации, и влияние этих свойств на степень выполнения функций, возлагаемых на машину. ГОСТы содержат обширную номенклатуру показателей надёжности, однако для оценки уровня надёжности не все показатели имеют одинаковое значение, поэтому, по мнению авторов настоящей работы, следует пользоваться определённой номенклатурой показателей надёжности для определения норм надёжности, включаемых в нормативно-техническую документацию, характеризующих безотказность, ремонтопригодность, долговечность. Для ПМ, металлоконструкций кранов, применяемых в строительстве, вибрационных машин различного предназначения и др., когда определяющим фактором оценки последствий отказа является вынужденный простой, рекомендуются показатели: гамма-процентный ресурс (в часах или других единицах наработки); средний ресурс (в часах или других единицах наработки); срок службы (в годах); коэффициент готовности; при наличии отказа и вынужденного простоя дополнительно определяется наработка на отказ (в часах или других единицах наработки); коэффициент технического использования и оперативной готовности.

Расчёт норм надёжности рекомендуется вести по обеспечению работоспособности ПМ, как правило, на период до первого капитального ремонта. Для ПМ, у которых отсутствует деление ремонтов по видам, нормы надёжности следует рассчитывать до первого планового ремонта или на весь срок службы до списания.

Для прогнозирования надёжности ПМ, их элементов необходима информация об изменениях работоспособности объектов. Информация о надёжности этих объектов необходима на всех этапах их создания, при проектировании, изготовлении, испытаниях и эксплуатации.

На стадии проектирования ПМ, системы ПМ и средств механизации промышленного производства или готового проекта такую информацию можно получить расчётным путём. Качество и достоверность расчётов позволяют определить заложенный уровень надёжности рассматриваемого объекта.

Прогнозировать надёжность новых проектируемых ПМ можно только аналитическим расчётным методом. Расчёты позволяют определить показатели надёжности и взаимосвязь между показателями надёжности и параметрами, характеризующими конструкцию, технологию и методы эксплуатации ПМ. Для прогнозирования показателей надёжности необходимо знать аналитические закономерности, полученные эмпирическим путём в соответствии с параметрами протекания процесса технологии работы машины, её сборочных единиц и деталей.

Однако при изготовлении ПМ надёжность их зачастую не соответствует запроектированной. При поступлении готовой машины в эксплуатацию нередко надёжность резко снижается за счёт несовершенства эксплуатации, содержания ремонтов, замены материалов при изготовлении и других факторов.

Следует отметить, что нередко опытный образец машины, в том числе даже подготовленный для серийного производства, имеет сниженную надёжность.

Статистическая информация о надёжности ПМ, деталей, сборочных единиц, металлоконструкций, виброизолированных фундаментов под машины в процессе их эксплуатации позволяет определить показатели надёжности для определённого типа (модели) с учётом режимов работы и условий эксплуатации за определённый промежуток времени.

Следовательно, при решении вопроса возможной потери работоспособности ПМ в процессе эксплуатации используют статистические данные, которые при правильной методике сбора и обработки информации дают достаточно достоверные сведения о надёжности данной ПМ с учётом реальных условий эксплуатации.

Однако эта информация может быть использована в ограниченном объёме для прогнозирования надёжности новых моделей ПМ, так как к моменту накопления необходимой информации происходит старение данной конструкции модели.

Совокупность факторов, определяющих надёжность ПМ, её сборочных единиц и деталей характеризуется случайными величинами. Соответственно сами показатели надёжности ПМ являются также случайными величинами и определяются на основе методов теории вероятностей и математической статистики.

Наиболее часто используемыми в теории надёжности машин функциями распределения плотности вероятностей являются: 1) нормального распределения; 2) Вейбулла; в) экспоненциальное; г) логарифмически нормальное.

Функциональная зависимость двухпараметрического закона распределения Вейбулла с параметрами $a$ и $b$ представляется в виде выражения:

$$f(t) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right]. \qquad (1)$$

При значении параметра $b = 2$ получается распределение Релея, а при $b = 1$ – экспоненциальное. Распределение Вейбулла наиболее широко проявляется при анализе прочности и долговечности машин и механических систем. Это распределение характеризует срок службы узлов металлоконструкций, коробок передач автомобилей, шариковых подшипников, пределы упругости стали, усталостной прочности стали, максимальные (предельные) нагрузки, которые испытывают в процессе эксплуатации (в переходных/резонансных режимах пуска или остановки машинного агрегата) виброизолированные фундаменты под ПМ (типа вибросепараторов), а также многие другие показатели надёжности ПМ и средств механизации промышленного производства.

Достоверность того, что эмпирическая кривая согласуется с теоретической принятого закона распределения, подтверждается известными критериями согласия Пирсона и Колмогорова.

Для аппроксимирования полученного статистического распределения к тому или другому закону теоретического распределения пользуются вероятностными бумагами, с помощью которых можно достоверно и быстро определить закон распределения.

Следует отметить, что выбор номенклатуры показателей надёжности погрузочно-разгрузочных машин (кранов), широко применяемых в строительстве и в промышленном производстве, зависит от наличия информационной обеспеченности. Номенклатура показателей надёжности погрузочно-разгрузочных ПМ должна быть достаточной, чтобы наиболее полно охарактеризовать технические, технологические, эксплуатационные и экономические свойства и особенности ПМ. Номенклатура показателей должна быть минимальной, но достаточной для решения вопросов совершенствования конструкции, технологии изготовления, эксплуатации и экономического обоснования эффективности планирования повышения надёжности ПМ. Показатели должны давать количественную и качественную оценку и обеспечивать определение наилучшего (или оптимального) варианта.

Однако расчёты, проведенные по этому методу, позволяют судить о показателях только в пределах определённого промежутка времени работы изделия и, как правило, дают ошибочные данные за пределами рассмотренного периода.

Вопрос о прохождении через резонанс обсуждался в многочисленных работах [1, 2, 3, 4]. При этом основное внимание уделялось рассмотрению систем с одной степенью свободы, которое даёт также возможность сравнительно простого изучения систем с конечным числом степеней свободы. Особенно велико значение этого вопроса при динамическом расчёте металлоконструкций ПМ и виброизолированных фундаментов под вибросепараторы сыпучих материалов.

Среди различных способов подавления пускоостановочного резонанса, как известно, наряду с усовершенствованием обычных демпферов используется применение динамических гасителей колебаний; расчёт гасителей требует достаточно полного изучения нестационарных колебаний (их резонансных характеристик и т.н. относительного динамического коэффициента [2]) как самой металлоконструкции, так и фундамента под ПМ с учётом действительного характера изменения нагрузки. Несмотря на наличие ряда важных результатов, полученных в области расчёта на прохождение через резонанс, отражённых в многочисленных публикациях, многие вопросы этой теории требуют дальнейшего изучения.

Как известно, в литературе очень широко представлены методы расчёта, основанные на использовании точных решений, выраженных в различных специальных функциях. При этом получение численных результатов во многих случаях существенно облегчается наличием соответствующих таблиц.

В монографиях [1,2, 3] приводится ряд результатов, основанных на использовании интегралов вероятности и функций Ломмеля двух переменных; эти функции используются также и в [4], и в многочисленных статьях, посвящённых этому вопросу.

**Цель работы** состоит в обосновании полученных результатов, позволяющих расширить область изменения частоты и амплитуды силы, вызывающей колебания в режиме пуска и остановки ПМ, определять точно аналитические значения относительного динамического коэффициента (и тем самым устанавливать точное значение предельной нагрузки на металлоконструкцию/виброизолированный фундамент под ПМ), а в отдельных случаях получать простые решения в сравнительно хорошо изученных функциях. Учёт затухания при этом производится обычными методами (скажем, в соответствии с гипотезой и методом Е.С. Сорокина [1]) и поэтому обсуждается весьма кратко.

Следует заметить, что практически все рассмотренные результаты получены в функциях, родственных бесселевым функциям. Среди этих функций функции Ломмеля двух переменных, у которых вторая переменная равняется нулю, используются весьма часто. Уместно заметить и то, что имеющиеся в литературе формулы:

$$\begin{cases} U_\nu(w,0) = \dfrac{(w/2)^{1/2}}{\Gamma(\nu-1)} \cdot S_{\nu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(w/2), \\ V_\nu(w,0) = \dfrac{(w/2)^{1/2}}{\Gamma(\nu-1)} \cdot S_{\nu-\frac{1}{2}}(w/2), \end{cases} \tag{2}$$

в левой части которых представлены функции Ломмеля двух переменных, а в правой - функции Ломмеля одной переменной, позволяют сделать запись несколько более удобной.

**Основная часть.** 1. Физико-механическая модель и динамический расчёт нестационарных колебаний деформируемых систем (металлоконструкций кранов, фундаментов под ПМ при прохождении пускоостановочных резонансов).

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c^*x = P(t)\sin[\varphi(t)], \tag{3}$$

где $x$ – динамическое перемещение; $c^*$ – комплексный квазиупругий коэффициент, позволяющий учитывать демпфирование; функции $P(t), \varphi(t)$ описывают нагрузку. (Очевидно, что предельное (максимальное) значение усилия, развиваемого в металлоконструкции/фундаменте под ПМ в момент прохождения резонанса, описывается членом $\sim c^*x$). Возможно и рассмотрение уравнения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + n\frac{dx}{dt} + c_1x = P(t)\cdot\sin[\varphi(t)], \tag{4}$$

где $n -$ коэффициент вязкого трения в демпфере; $c_1 -$ квазиупругий коэффициент. При этом считаем, что и металлоконструкция и фундамент под ПМ представимы в рамках модели со сосредоточенными параметрами.

Если воспользоваться методом Ван-дер-Поля [5], то решение написанных выше уравнений можно представить в виде:

$$x(t) = a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \delta) + b(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \delta), \qquad (5)$$

где $\omega_0 = \sqrt{c_1 / m}$, $\delta -$ начальная фаза нестационарных колебаний. При этом амплитуда колебаний $A(t)$ ПМ (или её элемента) определяется зависимостями:

$$A(t) = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}, \quad a(t) = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-t_0}^{t} P(\tau)\sin[\varphi(\tau)]d\tau, \quad b(t) = -\frac{1}{2\omega_0} \int_{-t_0}^{t} P(\tau)\cos[\varphi(\tau)]d\tau, \qquad (6)$$

где $t_0$ определяется из уравнения $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0} = \omega_0$; $t_0 -$ значение $t$ в момент прохождения ПМ (её элемента) через резонанс. Очевидно, что величина $|c_1 \cdot A(t)|$ при $t = t_0$ определяет предельное значение нагрузки на конструкцию ПМ в момент прохождения резонанса. Ниже рассмотрен ряд простых задач, для которых получены точные аналитические результаты.

Случай 1. $P(t), \varphi(t)$ являются степенными функциями времени $t$.

Тогда $P(t) = A^* t^{\mu}$, $\varphi(t) = B^* t^{\mu_1}$. В этом случае интегралы (6) с точностью до постоянного множителя представимы через неполную гамма-функцию, у которой второй аргумент является мнимым. Воспользуемся обозначениями [6]:

$$\Gamma(\alpha, ix) = \exp(i\pi\alpha/2) \cdot [C(x,\alpha) - iS(x,\alpha)], \quad C(x,\alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1}\cos t dt, \quad S(x,\alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1}\sin t dt \qquad (6)$$

и обозначим: $C_1(x,\alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1}\cos t dt$, $S_1(x,\alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1}\sin t dt$. При этом получим:

$$a(t) = \frac{A^*}{2\omega_0 \mu_1 \left[B^*\right]^{(1+\mu)/\mu_1}} \left[ S_1\left( B^* t^{\mu_1}, \frac{1+\mu}{\mu_1} \right) + S_1\left( B^* t_0^{\mu_1}, \frac{1+\mu}{\mu_1} \right) \right], \qquad (7)$$

$$b(t) = \frac{-A^*}{2\omega_0 \mu_1 \left[B^*\right]^{(1+\mu)/\mu_1}} \left[ C_1\left( B^* t^{\mu_1}, \frac{1+\mu}{\mu_1} \right) + C_1\left( B^* t_0^{\mu_1}, \frac{1+\mu}{\mu_1} \right) \right]. \qquad (8)$$

Применяя принцип суперпозиции, можно сразу получить решение в случае, когда функция $P(t)$ является полиномом, как сумму слагаемых, представляющих неполные гамма-функции, и естественно, если $P(t)$ или $\varphi(t)$ является степенным рядом – в виде ряда по неполным гамма-функциям.

Случай 2. $P(t), \varphi(t)$ описываются тригонометрическими и экспоненциальными функциями.

При этом будет использована теория неполных бесселевых функций [7]. Положим, что $\varphi(t) = z\cos t,\ P(t) = P_0 \sin^{2\nu} t$. Поскольку неполные цилиндрические функции – неполная функция Бесселя $J_\nu(w,z)$ и неполная функция Струве $H_\nu(w,z)$ выражаются формулами:

$$J_\nu(w,z) = \frac{2z^\nu}{C_\nu}\int_0^w \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta,\ \ H_\nu(w,z) = \frac{2z^\nu}{C_\nu}\int_0^w \sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta, \qquad (9)$$

где $C_\nu = 2^\nu \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, то, очевидно, что функции $a(t)$ и $b(t)$ лишь постоянным множителем отличаются от функции $J_\nu(w,z)$ и $H_\nu(w,z)$:

$$a(t) = \frac{P_0 \cdot C_\nu}{4\omega_0 \cdot z^\nu}\cdot H_\nu(t,z),\ \ b(t) = -\frac{P_0 \cdot C_\nu}{4\omega_0 \cdot z^\nu}\cdot J_\nu(t,z). \qquad (10)$$

Случай 3. $\varphi(t) = z\sin t - \nu t,\ \ P(t) = P_0 = const.$

Принимая во внимание формулы для неполных функций Ангера и неполных функций Вебера:

$$I_\nu(w,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^w \cos(z\sin\theta - \nu\theta)d\theta,\ \ B_\nu(w,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^w \sin(z\sin\theta - \nu\theta)d\theta, \qquad (11)$$

видим, что и в этом случае функции $a(t)$ и $b(t)$ лишь постоянным множителем отличаются от названных выше неполных цилиндрических функций:

$$a(t) = \frac{P_0 \cdot \pi}{2\omega_0}\cdot B_\nu(t,z),\ \ b(t) = -\frac{P_0 \cdot \pi}{2\omega_0}\cdot I_\nu(t,z). \qquad (12)$$

Учитывая возможность изменения параметра $\nu$, можно отметить, что полученные решения в неполных цилиндрических функциях могут дать возможность приближённого представления многих реальных законов изменения частоты в ПМ в период её пуска/остановки.

*Случай 4.* $\varphi(t) = \alpha t - \gamma t^3,\ \ P(t) = P_0 = const.$

Тогда функции $a(t), b(t)$ выражаются через неполные интегралы Эйри, которые принадлежат к классу неполных цилиндрических функций в форме Бесселя. Результат интегрирования в первой из них доставляется неполной функцией Вебера, а во второй – неполной функцией Ангера с помощью формул [7]:

$$a(t) = \frac{P_0 \cdot \pi \cdot \sqrt{\pi}}{6 \cdot \sqrt[3]{\gamma} \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left[B_{1/3}(w,\eta) + B_{-1/3}(w,\eta)\right]; \; b(t) = \frac{P_0 \cdot \pi \cdot \sqrt{\pi}}{6 \cdot \sqrt[3]{\gamma} \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left[I_{1/3}(w,\eta) + I_{-1/3}(w,\eta)\right];$$

$$w = \sqrt[3]{\gamma} \cdot t; \;\; z = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}}; \;\; \eta = \frac{2 \cdot z \cdot \sqrt{z}}{3 \cdot \sqrt{3}}. \tag{13}$$

*Случай 5.* $P(t) = P_0$, $\varphi = \exp\left[i\left(\frac{bt^3}{3} + \frac{at^2}{2}\right)\right]$. Введём независимую переменную $\tau = t + \kappa$, где $\kappa = -a/(2b)$, при этом получим $\varphi(\tau) = \exp\left[i\left(\frac{b\tau^3}{3} - \frac{a^2\tau}{4b} + \frac{a^3}{12b^2}\right)\right]$, и таким образом получаем, что данный случай сводится к предшествующему.

Наряду с неполными цилиндрическими функциями [9] при учёте явлений, связанных с прохождением через резонанс, возможно использование рассмотренного в работе [8] обобщённого интеграла вероятности:

$$\Phi(\alpha, z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-t^2} \cdot t^{\alpha-1} dt, \tag{14}$$

который даёт решение задачи при постоянном угловом ускорении и амплитуде силы, изменяющейся по степенному закону.

Учёт затухания с помощью введения комплексного квазиупругого коэффициента не представляет труда (как и расчёт с использованием метода и гипотезы Е.С. Сорокина [2]). Следует обратить внимание на то, что примененный вместо демпфера динамический гаситель колебаний обычно представляет систему с невысоким уровнем демпфирования. В этом случае аргумент специальной функции, равный $x + iy$, где $y/x$ мало по сравнению с единицей, и вычисление значений этих функций можно сравнительно просто выполнить, используя способ, описанный в книгах [9,10].

В работе [10] для вычисления бесселевых функций при $y/x \ll 1$ используется их разложение в ряд Тейлора в окрестности точек, лежащих на действительной оси, и подробно описываются выкладки, позволяющие получить необходимые расчётные формулы, в [9] приводится более простая, но менее точная формула. Для проведения этих выкладок нужно для каждой из специальных функций, упоминаемых в статье, воспользоваться её разложением в степенной ряд.

В ряде работ [13-16] показано, что наиболее точной аппроксимацией функции распределения вероятностей характеристик прочности металлоконструкций, конструкционных материалов, используемых в сельскохозяйственных машинах и предельной нагрузки конкретных изделий (например, фундаментов под вибросепараторы семян при прохождении через резонанс) является трёхпараметрический закон Вейбулла. Этот закон хорошо соответствует физическим представлениям об области определения предельной нагрузки реальных конструкций, так как позволяет задавать ограниченные слева положительной величиной функции распределения вероятностей с различной асимметрией. Выше определены амплитуды $A(t)$ колебаний в процессе прохождения механических систем (в т.ч. металлоконструкций сельскохозяйственных машин) через резонанс. Именно они и определяют предельные нагрузки на конструкции в переходных режимах их функционирования (т.е. при пуске/торможении).

Рассмотрим два метода вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности изделий однократного применения в случае аппроксимации функции распределения предельной нагрузки законом Вейбулла в виде:

$$G(x)=\begin{cases}1-\exp\left\{-\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^{b}\right\} \ \text{при} \ x>c, \\ 0 \ \text{при} \ x\le c,\end{cases} \tag{15}$$

где $a, b, c-$ параметры масштаба, формы и сдвига соответственно.

Полагаем, сто распределение квазистатической действующей нагрузки, коэффициент вариации $\nu$ и параметр формы $b$ распределения предельной нагрузки известны априори (например, из опыта отработки изделий-аналогов), выборка значений предельной нагрузки малого объёма и нецензурированная.

2. Метод фидуциальных вероятностей. В работе [17] отмечается, что наиболее универсальным методом построения доверительных границ при наличии одного неизвестного параметра является метод фидуциальных вероятностей Фишера. В случае одного неизвестного параметра $\gamma-$ фидуциальные границы являются и $\gamma-$ доверительными.

Плотность распределения фидуциальных вероятностей неизвестного параметра $x$, оцениваемого по единичным испытаниям, можно получить на основе функции правдоподобия в виде:

$$\varphi(x)=\frac{L(x/Q_1,Q_2,...,Q_n)}{\int_{x_н}^{x_в}L(x/Q_1,Q_2,...,Q_n)dx}, \tag{16}$$

где $L(\cdot)-$ функция правдоподобия; $Q_i$ $(i=1,...,n)-$ значения предельной нагрузки: $x_н, x_в -$ соответственно возможные нижняя и верхняя границы изменения параметра $x$.

В качестве верхней границы изменения параметра сдвига можно принять минимальное значение предельной нагрузки $Q$, полученное при испытаниях:

$$c_в = \min(Q_i) = \min(c \cdot A(t)). \tag{17}$$

(Здесь $c -$ жесткость, $A(t) -$ амплитуда смещения в механической системе во время переходного процесса).

Для трехпараметрического закона Вейбулла параметр сдвига всегда положителен. Теоретически его величина может быть сколь угодно малой. При построении плотности фидуциальных вероятностей этого параметра нижнюю границу параметра $c_н$ принимаем:

$$c_н = 0{,}0001c_в \tag{18}$$

(меньшие значения приводят к вычислительным трудностям типа «исчезновение порядка» при построении плотности $\varphi(c)$ на ЭВМ). Тогда:

$$L(c/Q_1, Q_2, ..., Q_n) = \prod_{i=1}^{n} g(c/Q_i), \tag{19}$$

где

$$g(Q) = \frac{b}{a}\left(\frac{Q-c}{a}\right)^{b-1} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{Q-c}{a}\right)^{b}\right\} \tag{20}$$

- плотность вероятности закона Вейбулла.

Подставляя (19) и (20) с учетом (17) и (18) в (16), получим плотность распределения вероятностей неизвестного параметра сдвига $\varphi(c)$. Практически при построении $\varphi(c)$ вычисляется ряд её дискретных значений $\varphi(c_i)$, соответствующих изменению параметра сдвига в интервале $(c_н, c_в)$, после чего для этих же значений вычисляется функция распределения параметра сдвига $\psi(c_i)$. Для произвольных значений вероятности параметр сдвига можно определить путём обратной интерполяции полученных значений $\psi(c_i)$.

Через параметры $b, c, v$ функция распределения закона Вейбулла записывается в виде:

$$G(Q)=\begin{cases}1-\exp\left\{-\left(\dfrac{Q-c}{cf(\nu,b)}\right)^b\right\} \ \text{при}\ Q>c,\\ 0\ \text{при}\ Q\le c,\end{cases} \tag{21}$$

где $f(\nu,b)=\left[\dfrac{1}{\nu}\cdot\sqrt{\Gamma(1+2/b)-\Gamma^2(1+1/b)}-\Gamma(1+1/b)\right]^{-1}$, $\Gamma(\cdot)-$ гамма-функция. Тогда при постоянной нагрузке $F$ показатель надёжности $R$ определяется из выражения:

$$R=\begin{cases}\exp\left\{-\left(\dfrac{F-c}{cf(\nu,b)}\right)^b\right\} \ \text{при}\ F>c,\\ 1\ \text{при}\ F\le c\end{cases} \tag{22}$$

и является функцией неизвестного параметра сдвига $c$, функция распределения которого известна. Нижние $\gamma-$ доверительные границы показателя надёжности $\underline{R}_\gamma$ можно получить при использовании в (22) нижних $\gamma-$ фидуциальных границ $\underline{c}_\gamma$ (здесь и далее по тексту подчёркивание функции снизу или сверху означает, что рассматривается соответственно её нижняя или верхняя доверительная граница).

Если действующая нагрузка $F$ величина случайная, то методом статистического моделирования можно получить функцию распределения показателя надёжности $\psi(R)$, а произвольные значения $\underline{R}_\gamma$ определены как корень уравнения:

$$1-\gamma=\int_0^{\underline{R}_\gamma}\psi(R)dR. \tag{23}$$

Для реализации данного метода расчета нижних доверительных границ показателя надёжности авторами статьи разработана программа для ПЭВМ. Точность оценок $\underline{R}_\gamma$ в широком диапазоне изменения входящих в расчёт исходных данных исследована и подтверждена методом статистического моделирования. При этом область $(c_н, c_в)$ разбивается на 100 интервалов, интерполяцию по $\psi(c)$ производят методом касательных.

**3. Метод доверительных множеств.** Более простым и более эффективным по затратам времени ЭВМ методом вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности является метод доверительных множеств, основанный на использовании доверительных интервалов неизвестного параметра. Если в качестве неизвестного параметра закона Вейбулла, аппроксимирующего распределение предельной нагрузки, принять математическое ожидание, то её доверительную границу $\beta$ можно представить в виде $Q_\beta = f_1(\hat{Q}, n, \nu, b, \beta)$, где $\hat{Q}-$ выборочная оценка математического ожидания, $n-$ объём выборки.

Для заданных значений $n, \nu, b$ произвольную доверительную границу $Q_\beta$ можно получить с использованием метода статистического моделирования путём построения функции распределения $\psi(K_Q)$ величины коэффициента $K_Q = \hat{Q}/Q_0$, где:

$$Q_0 = c \cdot \left\{ 1 - \frac{\nu \cdot \Gamma(1+1/b)}{\sqrt{\Gamma(1+2/b) - \Gamma^2(1+1/b)}} \right\}^{-1}, \tag{24}$$

- точное значение математического ожидания распределения предельной нагрузки. Последующее вычисление доверительных границ для $K_Q$ проводится по формуле: для нижних доверительных границ $1-\beta = \int_0^{\underline{K}_{Q\beta}} \psi(K_Q) dK_Q$ и для верхних доверительных границ $\beta = \int_0^{\overline{K}_{Q\beta}} \psi(K_Q) dK_Q$.

Однако для построения функции $\psi(K_Q)$ времени ЭВМ требуется не меньше, чем для построения $\psi(c)$ при фидуциальном подходе, поэтому предложена упрощённая процедура вычисления доверительных границ $Q_\beta$.

Методом статистического моделирования можно исследовать свойства доверительных множителей:

$$K_{Q_\beta} = f_2(n, \nu, b, \beta), \; Q_\beta = K_{Q_\beta} \cdot \hat{Q}. \tag{25}$$

Можно показать, что для выборок малого объёма при изменении параметра формы $b$ в широком диапазоне при прочих равных условиях множители $K_{Q_\beta}$ изменяются весьма незначительно (в преде лах нескольких процентов). Экстремальным значениям множителей $K_{Q_\beta}$ соответствуют крайние значения параметра формы, что позволяет упростить процедуру вычисления множителей $K_{Q_\beta}$, исключив параметр $b$ в явном виде из (25).

В качестве нижней границы теоретически возможных значений параметра формы плотности вероятности распределения предельной нагрузки можно принять $b_{\min} = 1$ (при $b = 1$ распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное). Максимально возможное значение $b_{\max}$ реализуется в случае равенства нулю параметра сдвига (двухпараметрический закон Вейбулла) и является функцией коэффициента вариации:

$$\nu = \sqrt{\left[\Gamma(1+2/b_{\max})/\Gamma^2(1+1/b_{\max})\right]-1}. \qquad (26)$$

При фиксированных значениях $n,\nu,\beta$ методом статистического моделирования можно получить коэффициенты $K_{Q_\beta}{}' = f_2(n,\nu,b_{\min}=1,\beta)$, и $K_{Q_\beta}{}'' = f_2(n,\nu,b_{\max}=f(\nu),\beta)$. Тогда $\underline{K}_{Q_\beta} = \min(\underline{K}_{Q_\beta}{}',\underline{K}_{Q_\beta}{}'')$ и $\overline{K}_{Q_\beta} = \max(\overline{K}_{Q_\beta}{}',\overline{K}_{Q_\beta}{}'')$.

По выборочному значению математического ожидания распределения предельной нагрузки $\hat{Q}$ с использованием соответствующего доверительного множителя $\underline{K}_{Q_\beta}$ вычисляется нижняя доверительная граница $\beta$ - $\underline{Q}_\beta$. При известных $b$ и $\nu$:

$$\underline{a}_\beta = \frac{\underline{Q}_\beta \cdot \nu}{\sqrt{\Gamma(1+2/b)-\Gamma^2(1+1/b)}},\ \ \underline{c}_\beta = \underline{Q}_\beta - \underline{a}_\beta \cdot \Gamma(1+1/b). \qquad (27)$$

При постоянной действующей нагрузке $F$ нижние доверительные границы показателя надёжности $\underline{R}_\gamma$ определяются из выражения:

$$\underline{R}_\gamma = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\dfrac{F-\underline{c}_\beta}{\underline{a}_\beta}\right)^b\right\} \ \ при\ \ F > \underline{c}_\beta, \\ 1 \ \ при\ \ F \le \underline{c}_\beta. \end{cases} \qquad (28)$$

При известном распределении действующей случайной нагрузки $F$ функция $\psi(R)$ вычисляется методом статистического моделирования, а значения $\underline{R}_\gamma$ определяются из зависимости (23).

Множители $K_{Q_\beta}$ для ряда различных доверительных вероятностей $\beta$ и коэффициентов вариации $\nu$ достаточно вычислить один раз и хранить их в памяти ЭВМ (банке данных). Впоследствии необходимые для расчётов множители для конкретных значений $\beta$ и $\nu$ можно вычислить путём интерполяции имеющихся данных, что делает предложенный метод очень эффективным по времени счёта на ЭВМ.

Для реализации данного метода разработана программа для ПЭВМ. Методом статистического моделирования для уровня доверительной вероятности 0,5; 0,9 и 0,95 при широком варьировании исходных параметров подтверждено, что нижние доверительные границы $\beta$ множителя $K_Q$ позволяют получать нижние доверительные границы $\gamma$ - показателя надёжности.

В таблице приведены результаты вычислений нижних доверительных границ показателя надёжности конструкции для различных значений коэффициента вариации предельной нагрузки $v$ и объёма выборки значений предельной нагрузки $n$. Это позволяет судить о представительности получаемых оценок надёжности.

Таблица 1.

Результаты вычислений $\underline{R}_\gamma$.

| $n$ | $v$ | $\gamma$ | $\underline{K}_{Q_\gamma}$ | $\underline{R}_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,05 | 0,5<br>0,9<br>0,95 | 0,990<br>0,960<br>0,940 | 0,99983<br>0,9963<br>0,987 |
| | 0,15 | 0,5<br>0,9<br>0,95 | 0,969<br>0,795<br>0,725 | 0,815<br>0,388<br>0,168 |
| 5 | 0,05 | 0,5<br>0,9<br>0,95 | 0,998<br>0,980<br>0,970 | 0,999957<br>0,99938<br>0,9984 |
| | 0,15 | 0,5<br>0,9<br>0,95 | 0,994<br>0,910<br>0,880 | 0,849<br>0,709<br>0,640 |
| 20 | 0,05 | 0,5<br>0,9<br>0,95 | 0,999<br>0,990<br>0,985 | 0,999965<br>0,99983<br>0,99966 |
| | 0,15 | 0,5<br>0,9<br>0,95 | 0,9975<br>0,955<br>0,940 | 0,853<br>0,793<br>0,768 |

Полученные в этой работе результаты могут быть использованы как для расчёта обычных фундаментов под машины, установленные на виброизоляторах (вибросепараторы), так и для расчёта виброизолированных фундаментов, оборудованных динамическими гасителями колебаний. Особенно важны уточнения в расчётах на прохождение через резонанс при решении вопроса об использовании новых, ещё не нашедших широкого распространения на практике технических решений, отражённых в [10-12].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания механических систем. – Киев: Наукова думка, 1965. – 716с.

2. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания механических систем. – Киев: Наукова думка, 1966. – 336с.

3. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340с.

4. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 459с.

5. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 216с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 295с.

7. Агрест М.М., Максимов М.З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. – М.: Атомиздат, 1965. – 351с.

8. Хаджи П.И. Функция вероятности. – Кишинёв: АН Молдавской ССР, 1971. – 399с.

9. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288с.

10. Коренев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний. – М.: Наука, 1988. – 304с.

11. Справочник проектировщика. Динамический расчёт специальных инженерных сооружений и конструкций. – М.: Стройиздат, 1988. – 463с.

12. Коренев Б.Г. О динамическом расчёте фундаментов под машины на прохождение через резонанс//Известия вузов. Строительство. – 1997. - №12. – С. 35-39.

13. Беленький Д.М., Элькин А.И., Русаков А.В. Исследование распределения механических свойств и связи между ними//Проблемы прочности. – 1977. - №12. – С. 93-96.

14. Беленький Д.М., Кубарев А.Е., Элькин А.И. и др. Контроль и сертификация механических свойств металлопроката//Заводская лаборатория. – 1992. - №2. – С. 47-49.

15. Головченко В.П. Возможности использования распределения Вейбулла в качестве универсальной модели аппроксимации//Труды ГосНИИГА. – 1988. - №279. – С. 91-98.

16. Сундарарайян К. Вероятностная оценка надёжности сосудов давления и трубопроводов//Теоретические основы инженерных расчётов. – Т.2. – Труды Американского об-ва инж.- мех. – М.: Мир, 1986. – С. 160-183.

17. Павлов И.В. Статистические методы оценки надёжности сложных систем по результатам испытаний. – М.: Радио и связь, 1992. – 168с.