

**В. С. ЛОВЕЙКІН**, докт. техн. наук, **Ю. В. ЧОВНЮК**, канд. техн. наук,  
*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

**М. Г. ДІКТЕРУК**, канд. техн. наук, **К. І. ПОЧКА**, канд. техн. наук  
*Київський національний університет будівництва і архітектури*

## **АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД У АНАЛІЗІ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЕНЕРГОСИЛОВОГО КРИТЕРІЮ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ РУХУ МОСТОВИХ КРАНІВ**

**Постановка проблеми.** При роботі мостових кранів часто спостерігаються маятникові коливання вантажу, що є причиною нерівномірного руху вказаних кранів, їх вантажних візків, навантажень на канати та силові елементи кранів, які, у свою чергу, створюють різноманітні незручності при їх експлуатації, зменшують надійність функціонування як крану у цілому, так і його окремих елементів. Зрозуміло, що всі ці фактори необхідно враховувати при уточнених розрахунках кранів (особливо у режимах їх оптимального (з мінімальною необхідною для цього енергією) пуску/гальмування).

Користуючись стандартною методикою та схемою розрахунку маятникових коливань вантажу на канатах мостового крану, що проводяться зазвичай за моделлю двомасової системи, не обхідно здійснити подальші уточнення і вдосконалення, особливо на основі узагальнених енергосилових критеріїв якості його руху.

**Аналіз публікацій по темі дослідження.** Розрахунок маятникових коливань вантажу зазвичай проводять за найпростішою схемою двомасової системи [1-5], вважаючи при цьому, що кут відхилення канатів від вертикалі не перевищує  $10^0 \dots 12^0$  (малі коливання). При цьому вважають також, що період маятникових коливань вантажу на гнучких канатах більше чи одного порядку з періодом розгону (гальмування) крану, а рушійне зусилля приводного двигуна механізму пересування постійне й дорівнює середньому пусковому (гальмівному) значенню [5].

Для обґрунтування енергосилового (узагальненого) критерію якості руху мостового крану у режимах пуску (гальмування) застосований підхід авторів [6].

Результати робіт [5, 6] використані у даному дослідженні.

**Мета даної роботи** полягає у обґрунтуванні енергосилового критерію (узагальненого) оптимізації режимів та якості руху мостових кранів при їх пуску/гальмуванні, який забезпечує високу якість таких рухів (мінімізує їх енергетичні характеристики), а також у визначенні тривалості перехідних процесів для оптимальних режимів функціонування кранів.

### **Виклад основного матеріалу дослідження.**

Розглянемо коливання маятнікового типу у крановій системі, на котру діє деяке змінне зовнішнє (силове) поле (вимушені коливання). Оскільки коливання припускаються малими, то тим самим розуміємо, що зовнішнє поле досить слабе, інакше воно могло б викликати надто велике переміщення  $x$  (візка мостового крану з вантажем на канаті).

У цьому випадку поряд з власною потенціальною енергією  $\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$  ( $k$  – жорсткість кранової системи) у системи є ще потенціальна енергія  $U_e(x, t)$ , пов'язана з дією зовнішнього поля. Розкладаючи цей додатковий член у ряд за степенями малої величини  $x$  (переміщення крану вповдовж балки рейкового шляху), отримаємо:

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x \cdot \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (1)$$

Перший член у (1) є функцією тільки від часу і тому може бути відкинутий у функції Лагранжа (як повна похідна по  $t$  від деякої іншої функції часу). У другому члені  $-\frac{\partial U_e}{\partial x}$  є зовнішня “сила”, діюча на систему у положенні рівноваги й така, що є заданою функцією часу; позначимо її як  $F(t)$ . Таким чином, у потенціальній енергії з'являється член  $\{-x \cdot F(t)\}$ , тому функція Лагранжа кранової системи буде:

$$L = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} - \frac{k \cdot x^2}{2} + x \cdot F(t). \quad (2)$$

Відповідне рівняння руху є:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = F(t), \quad (3)$$

або

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{1}{m} \cdot F(t), \quad (4)$$

де  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – власна частота вільних коливань кранової системи,  $m$  – її маса,  $F(t)$  описує рівнодіючу усіх сил, що прикладені до системи (рушійні сили та сили опору).

Відомо, що загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами отримують у вигляді суми двох виразів:  $x = x_0 + x_1$ , де  $x_0$  – загальний розв'язок однорідного рівняння, а  $x_1$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

У подальшому для формування критерію якості руху кранової системи у режимі її пуску (тривалість пуску –  $t_{II}$ ) знадобиться формула повної енергії системи:

$$E_{повна} = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} - x \cdot F(t) = m \cdot \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2} - x \cdot \frac{F(t)}{m} \right\}. \quad (5)$$

Останній член у (5) символізує потенціальну енергію кранової системи, яку вона має під дією зовнішнього поля (силового), котре задане у часі –  $F(t)$ .

Критерій якості руху зводимо до мінімізації повної енергії системи  $E_{повна}$ , усередненої за період пуску кранової системи  $t_{II}$ . (При цьому  $F(t)$  є заданою функцією часу  $t$ ). Отже, для критерію, вказаного вище, маємо:

$$\frac{1}{t_{II}} \cdot m \cdot \int_0^{t_{II}} \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2} - x \cdot \frac{F(t)}{m} \right] dt \Rightarrow \min. \quad (6)$$

Необхідна умова реалізації критерію якості руху кранової системи (рівняння Ейлера-Пуассона) має вид:

$$\ddot{x} - \omega^2 \cdot x = -\frac{F(t)}{m}. \quad (7)$$

За нульових початкових умов:

$$x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

нижче наведені закони руху кранової системи, що задовольняють критерію якості руху (6) для різних заданих значень  $F(t)$ .

1.  $F(t) = F_0 = const$ ,

$$x = \frac{F_0}{m \cdot \omega^2} \cdot [1 + 2 \cdot \text{ch} \omega t]. \quad (9)$$

Виходячи з умови  $\dot{x}|_{t=t_{II}} = V$ , де  $V$  – швидкість руху вантажного візка мостового крану, при якій вказаний візок переходить у стаціонарний (штатний) режим руху, тут і надалі знаходимо значення  $t_{II}$  (за вказаних  $\omega$ ,  $m$  та параметрів силового фактору  $F(t)$  – амплітуди  $F_0$  і тривалості його у часі ( $t_0$ ) та інших стаціонарних показників):

$$t_{II} = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Arcsh} \left( \frac{m \cdot \omega \cdot V}{F_0} \right). \quad (10)$$

$$2. \quad F(t) = a \cdot t,$$

$$x = \frac{a}{m \cdot \omega^3} \cdot [\omega \cdot t - \text{sh}(\omega t)], \quad t_{II} = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Arcch} \left( 1 - \frac{m \cdot \omega^2 \cdot V}{a} \right). \quad (11)$$

$$3. \quad F(t) = F_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$$

$$x = \frac{F_0 / (2 \cdot m)}{(\alpha^2 - \omega^2)} \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha}{\omega} \right] \cdot \exp(\omega \cdot t) + \frac{F_0 / (2 \cdot m)}{(\alpha^2 - \omega^2)} \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha}{\omega} \right] \cdot \exp(-\omega \cdot t) + \frac{(F_0 / m)}{(\omega^2 - \alpha^2)} \cdot \exp(-\alpha \cdot t). \quad (12)$$

Для визначення  $t_{II}$  у цьому випадку слід розв'язати наступне трансцендентне рівняння:

$$V = \frac{F_0 / (2 \cdot m)}{(\alpha^2 - \omega^2)} \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha}{\omega} \right] \cdot \omega \cdot \exp(\omega \cdot t_{II}) + \frac{F_0 / (2 \cdot m)}{(\alpha^2 - \omega^2)} \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha}{\omega} \right] \cdot (-\omega) \cdot \exp(-\omega \cdot t_{II}) + \frac{(F_0 / m)}{(\omega^2 - \alpha^2)} \cdot (-\alpha) \cdot \exp(-\alpha \cdot t_{II}). \quad (13)$$

$$4. \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ F_0 \cdot t / T, & 0 < t < T; \\ F = F_0, & t > T. \end{cases} \quad (14)$$

Графік зміни  $F(t)$  для випадку 4 наведений на рис. 1.

При  $0 < t < T$ :

$$x(t) = \frac{F_0}{2 \cdot \omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{ \exp(\omega \cdot t) - \exp(-\omega \cdot t) \} - \frac{F_0 \cdot t}{\omega^2 \cdot T \cdot m}, \quad (15)$$

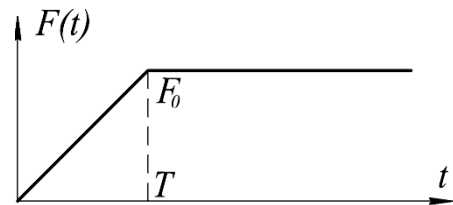


Рис. 1. Графік зміни  $F(t)$  для залежності (14).

або

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \text{sh}(\omega \cdot t) - \frac{F_0 \cdot t}{\omega^2 \cdot T \cdot m} = \frac{F_0}{\omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{ \text{sh}(\omega \cdot t) - \omega \cdot t \}. \quad (16)$$

При  $t > T$  шукаємо розв'язок (7) у вигляді:

$$x(t) = C_1 \cdot \exp[\omega \cdot (t - T)] + C_2 \cdot \exp[-\omega \cdot (t - T)] - \frac{F_0}{m \cdot \omega^2}. \quad (17)$$

З умов неперервності  $x$  та  $\dot{x}$  при  $t = T$  знаходимо:

$$C_1 = \frac{F_0}{2 \cdot \omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{ \text{sh}(\omega \cdot T) + \text{ch}(\omega \cdot T) \}; \quad C_2 = \frac{F_0}{2 \cdot \omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{ \text{sh}(\omega \cdot T) + \text{ch}(\omega \cdot T) + 1 \}. \quad (18)$$

Вважаємо, що  $t_{II} > T$ , тоді його знаходимо зі співвідношення:

$$V = \omega \cdot C_1 \cdot \exp[\omega \cdot (t_{II} - T)] + (-\omega) \cdot C_2 \cdot \exp[-\omega \cdot (t_{II} - T)]. \quad (19)$$

$$5. \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ F_0, & 0 < t < T; \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (20)$$

Графік зміни  $F(t)$  для випадку 5 наведений на рис. 2.

При  $0 < t < T$ :

$$x(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega^2} \cdot [1 + 2 \cdot \text{ch}(\omega \cdot t)]. \quad (21)$$

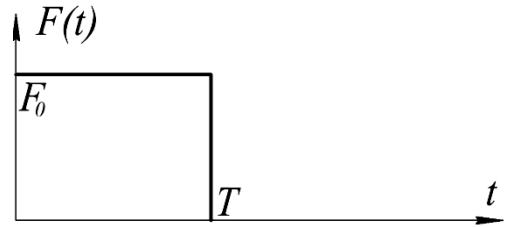


Рис. 2. Графік зміни  $F(t)$  для залежності (20).

При  $t > T$  шукаємо розв'язок (7) у

вигляді:

$$x(t) = \bar{C}_1 \cdot \exp[\omega \cdot (t - T)] + \bar{C}_2 \cdot \exp[-\omega \cdot (t - T)] + \frac{F_0}{m \cdot \omega^2} \cdot [1 + 2 \cdot \text{ch}(\omega \cdot T)]. \quad (22)$$

З умов неперервності  $x$  та  $\dot{x}$  при  $t = T$  знаходимо:

$$\bar{C}_1 = \frac{F_0}{m \cdot \omega^2} \cdot \text{sh}(\omega \cdot T); \quad \bar{C}_2 = -\frac{F_0}{m \cdot \omega^2} \cdot \text{sh}(\omega \cdot T). \quad (23)$$

Вважаємо, що  $t_{II} > T$ , тоді його знаходимо зі співвідношення:

$$V = \omega \cdot \bar{C}_1 \cdot \exp[\omega \cdot (t_{II} - T)] + (-\omega) \cdot \bar{C}_2 \cdot \exp[-\omega \cdot (t_{II} - T)]. \quad (24)$$

Враховуючи (23) з (24) можна отримати:

$$t_{II} = T + \frac{1}{\omega} \cdot \text{Arcch} \left\{ \frac{V \cdot m \cdot \omega}{2 \cdot F_0 \cdot \text{sh}(\omega \cdot T)} \right\}. \quad (25)$$

$$6. \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ F_0 \cdot \frac{t}{T}, & 0 < t < T; \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (26)$$

Графік зміни  $F(t)$  для випадку 6 наведений на рис. 3.

При  $0 < t < T$ :

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{\text{sh}(\omega \cdot t) - \omega \cdot t\}. \quad (27)$$

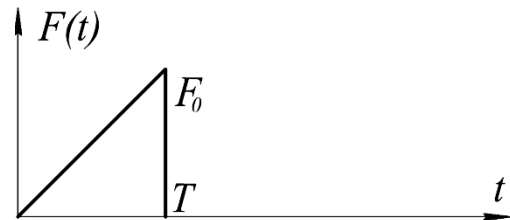


Рис. 3. Графік зміни  $F(t)$  для залежності (26).

При  $t > T$  шукаємо розв'язок (7) у

вигляді:

$$x(t) = \bar{\bar{C}}_1 \cdot \exp[\omega \cdot (t - T)] + \bar{\bar{C}}_2 \cdot \exp[-\omega \cdot (t - T)] + \frac{F_0}{\omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{\text{sh}(\omega \cdot T) - \omega \cdot T\}. \quad (28)$$

З умов неперервності  $x$  та  $\dot{x}$  при  $t = T$  знаходимо:

$$\bar{C}_1 = \frac{F_0}{2 \cdot \omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{\text{ch}(\omega \cdot T) - 1\}; \quad \bar{C}_2 = \frac{F_0}{2 \cdot \omega^3 \cdot T \cdot m} \cdot \{1 - \text{ch}(\omega \cdot T)\}. \quad (29)$$

Вважаємо, що  $t_{II} > T$ , тоді його знаходимо зі співвідношення:

$$V = \omega \cdot \bar{C}_1 \cdot \exp[\omega \cdot (t_{II} - T)] + (-\omega) \cdot \bar{C}_2 \cdot \exp[-\omega \cdot (t_{II} - T)]. \quad (30)$$

Враховуючи (29) з (30) можна отримати:

$$t_{II} = T + \frac{1}{\omega} \cdot \text{Arcch} \left\{ \frac{V \cdot \omega^2 \cdot T \cdot m}{F_0 \cdot \{\text{ch}(\omega \cdot T) - 1\}} \right\}. \quad (31)$$

Слід зазначити, що для законів  $F(t)$  (14) та (20) існує можливість оптимізації гальмування (без спеціальних додаткових мехатронних пристроїв керування рухом). Для цього потрібно лише задовольнити умові:

$$t_{\Gamma} = T = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\omega}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (32)$$

де  $t_{\Gamma}$  – тривалість процесу гальмування крану до повної зупинки. Нижче, у таблиці 1 подані значення  $t_{\Gamma}$  для різних  $\omega$  та  $n$ .

Таблиця 1.

Значення  $t_{\Gamma}$ , с для різних значень власної частоти коливань  $\omega$ ,  $c^{-1}$  кранової системи та  $n$

$n$	$\omega, c^{-1}$					
	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,5
1	15,71	12,57	10,47	7,85	6,28	4,19
2	31,42	25,14	20,94	15,70	12,56	8,38
3	47,13	37,71	31,41	23,55	18,84	12,57

**Висновки.** 1. Запропонований та обґрунтований аналітичний підхід у аналізі узагальненого енергосилового критерію оптимізації режимів руху мостових кранів. 2. Отримані закони руху системи “вантажний візок – канат – вантаж” мостового крану у режимах його пуску/гальмування, які оптимізують енергосилові показники перехідного процесу (мінімізують необхідну для реалізації цього процесу енергію системи), а також вирази для відповідної тривалості самого процесу пуску/гальмування. 3. Результати роботи можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку мостових кранів у режимах їх пуску/гальмування як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах їх реальної експлуатації.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Динамика машинных агрегатов на предельных режимах движения / И.И. Артоболевский, В.С. Лощинин. – М.: Наука, 1977. – 325 с.
2. Грузоподъёмные машины / М.П. Александров, Л.Н. Колобов, Н.А. Лобов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с.
3. Грузоподъёмные краны / Под ред. М.П. Александрова. – М.: Машиностроение. Кн. 1. – 1981. – 216 с.; Кн. 2. – 1981. – 287 с.
4. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / С.А. Казак. – М.: Машиностроение, 1968. – 472 с.
5. Лобов Н.А. Динамика грузоподъёмных кранов / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
6. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

УДК 621.873.01

**В. С. ЛОВЕЙКІН**, докт. техн. наук, **Ю. В. ЧОВНІЮК**, канд. техн. наук,  
*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

**М. Г. ДІКТЕРУК**, канд. техн. наук, **К. І. ПОЧКА**, канд. техн. наук  
*Київський національний університет будівництва і архітектури*

### **УНІВЕРСАЛЬНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ МОСТОВИХ КРАНІВ У ПРОЦЕСАХ ЇХ ПУСКУ ПІД ВПЛИВОМ ШВИДКОЗМІННИХ СИЛ**

**Постановка проблеми.** При роботі мостових кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу, які викликають нерівномірний рух кранів або їх вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності при їх експлуатації, що необхідно враховувати при уточнених розрахунках як самих кранів, так і (мехатронних) систем управління ними.

Існуючі методи аналізу вимушених (у тому числі маятникових) коливань вантажу на канатах за класичною схемою математичного аналізу та найпростішою схемою двомасової системи для різних законів зміни у часі ( $t$ ) вимушеної сили ( $F(t)$ ) вимагають, на думку авторів даного дослідження, подальшого уточнення та