УДК 621.87

А.Ф. ШЕВЧЕНКО, к. т. н., Н. П. КОЛЕСНИК, к. т. н.,
А. Л. ЧЕРВОНОШТАН инженер.
ГВУЗ «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры»

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ "КРАН-ВИБРАЦИОННОЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ" ДЛЯ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРАММЫ РАСЧЕТОВ НА ЭВМ

Постановка проблемы. Традиционно при составлении математических моделей в виде дифференциальных уравнений, описывающих различные процессы, используют уравнения Лагранжа II-го рода, которые в дальнейшем для их решения, преобразовывают в другие виды уравнений в зависимости от решаемых задач. При этом, как правило, дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков для их интегрирования сводят к уравнениям первого порядка используя известные способы. Так в работе [1] приведена система из девяти линейных дифференциальных уравнений второго порядка описывающая колебательный процесс механической системы "кран-вибрационное технологическое оборудование на крюке крана" (КВТО), которую необходимо было решать.

В работе [2] приведены результаты расчетов параметров вибраций, а именно в виде расчетных осциллограмм колебаний отдельных элементов системы стрелового самоходного крана и вибрационного технологического оборудования на крюке в установившемся режиме работы вибровозбудителя.

Цель данной работы – преобразование дифференциальных уравнений второго порядка системы, КВТО [1] содержащих искомые функции, в дифференциальные уравнения первого порядка с последующим составлением основной рабочей программы для интегрирования, например, методом Рунге-Кутта с использованием стандартных прикладных подпрограмм или пакетов прикладных программ, в среде "Mathematike", "Mathcad", Mathlab" и др.

Основной материал. Расчетную схему механической системы "стреловой кран-вибрационное технологическое оборудование на крюке" составлено с учетом конструктивных особенностей и условий эксплуатации, с целью, чтобы она более

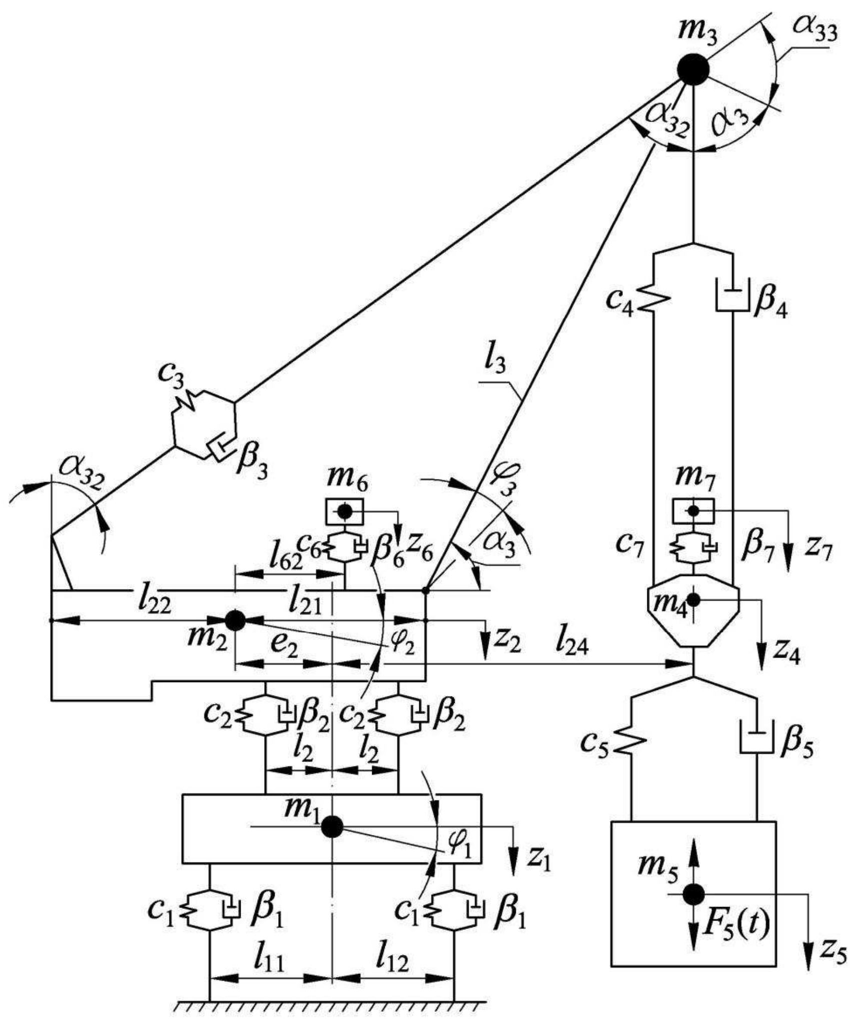

Рис. 1. Расчетная схема механической системы "стреловой кран-вибрационное технологическое оборудование на крюке".

полно отображала свойства реальной конструкции стрелового крана и действительную его работу.

На рис.1 обозначены массы $m_1 \dots m_7$ отдельных элементов крана которые соединены невесомыми линейно-упругими связями $c_1 \dots c_7$ с диссипативными силами с коэффициентами демпфирования соответственно $\beta_1 \dots \beta_7$. Опорно-ходовая часть крана массой m_1, поворотная часть крана массой m_2, масса стрелы m_3 приведена к оголовку. Крюковая подвеска массой m_4, груз массой m_5, масса кресла машиниста m_6, масса динамического гасителя m_7.

Представим систему дифференциальных уравнений КВТО [1] в виде:

$$m_1\ddot{x}_1 + 2(\beta_1 + \beta_2)\dot{x}_1 - 2\beta_2\dot{x}_2 - \beta_1(l_{11} - l_{12})\dot{x}_7 - 2\beta_2 e_2 \dot{x}_8 +$$
$$+ 2(c_1 + c_2)x_1 - 2c_2 x_2 - c_1(l_{11} - l_{12})x_7 - 2c_2 e_2 x_8 = 0; \qquad (1)$$

$$
\begin{gathered}
(m_2+m_3)\ddot{x}_2+m_3 l_{21}\ddot{x}_8+m_3 l_3\ddot{x}_9\cos\alpha_3-2\beta_2\dot{x}_1+(2\beta_2+\beta_4+\beta_6)\dot{x}_2-\beta_4\dot{x}_3-\\
-\beta_6\dot{x}_5+(2\beta_2 e_2+\beta_4 l_{21}+\beta_6 l_{62})\dot{x}_8+\beta_4 l_3\dot{x}_9\cos\alpha_3-2c_2x_1+(2c_2+c_4+c_6)x_2-\\
-c_4x_3-c_6x_5+(2c_2e_2+c_4l_{21}+c_6l_{62})x_8+c_4l_3x_9\cos\alpha_3=0;
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
\begin{gathered}
m_4\ddot{x}_3-\beta_4\dot{x}_2+(\beta_4+\beta_5+\beta_7)\dot{x}_3-\beta_5\dot{x}_4-\beta_7\dot{x}_6-\beta_4 l_{21}\dot{x}_8-\beta_4 l_3\dot{x}_9\cos\alpha_3-\\
-c_4x_2+(c_4+c_5+c_7)x_3-c_5x_4-c_7x_6-c_4l_{21}x_8-c_4l_3x_9\cos\alpha_3=0;
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$$
m_5\ddot{x}_4-\beta_5\dot{x}_3+\beta_5\dot{x}_4-c_5x_3+c_5x_4=P_5\sin\omega t;
\tag{4}
$$

$$
m_6\ddot{x}_5-\beta_6\dot{x}_2+\beta_6\dot{x}_5-\beta_6 l_{62}\dot{x}_8-c_6x_2+c_6x_5-c_6l_{62}x_8=0;
\tag{5}
$$

$$
m_7\ddot{x}_6-\beta_7\dot{x}_3+\beta_7\dot{x}_6-c_7x_3+c_7x_6=0;
\tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
J_1\ddot{x}_7-\beta_1(l_{11}-l_{12})\dot{x}_1+\left[\beta_1(l_{11}^2+l_{12}^2)+2\beta_2 l_2^2\right]\dot{x}_7-2\beta_2 l_2^2\dot{x}_8-\\
-c_1(l_{11}-l_{12})x_1+\left[c_1(l_{11}^2+l_{12}^2)+2c_2l_2^2\right]x_7-2c_2l_2^2x_8=0;
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
m_3l_{21}\ddot{x}_2+(J_2+m_3l_{21}^2)\ddot{x}_8+m_3l_{21}l_3\ddot{x}_9\cos\alpha_3-2\beta_2e_2\dot{x}_1+(2\beta_2e_2+\beta_4l_{21}+\beta_6l_{62})\dot{x}_2-\\
-\beta_4l_{21}\dot{x}_3-\beta_6l_{62}\dot{x}_5-2\beta_2l_2^2\dot{x}_7+\left[2\beta_2(e_2^2+l_2^2)+\beta_3(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32})^2+\right.\\
\left.+\beta_4l_{21}^2+\beta_6l_{62}^2\right]\dot{x}_8-\left[\beta_3l_3\cos\alpha_{33}(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32})-\beta_4l_{21}l_3\cos\alpha_3\right]\ddot{x}_9-\\
-2c_2e_2x_1+(2c_2e_2+c_4l_{21}+c_6l_{62})x_2-c_4l_{21}x_3-c_6l_{62}x_5-2c_2l_2^2x_7+\\
+\left[2c_2(e_2^2+l_2^2)+c_3(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32})^2+c_4l_{21}^2+c_6l_{62}^2\right]x_8-\\
-\left[c_3l_3\cos\alpha_{33}(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32})-c_4l_{21}l_3\cos\alpha_3\right]x_9=0.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
m_3l_3\ddot{x}_2\cos\alpha_3+m_3l_{21}l_3\ddot{x}_8\cos\alpha_3+m_3l_3^2\ddot{x}_9+\beta_4l_3\cos\alpha_3\dot{x}_2-\beta_4l_3\cos\alpha_3\dot{x}_3-\\
-\left[\beta_3l_3\cos\alpha_{33}(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32})-\beta_4l_{21}l_3\cos\alpha_3\right]\dot{x}_8+l_3^2\left(\beta_3\cos^2\alpha_{33}+\right.\\
\left.+\beta_4\cos^2\alpha_3\right)\dot{x}_9+c_4l_3\cos\alpha_3x_2-c_4l_3\cos\alpha_3x_3-\left[c_3l_3\cos\alpha_{33}(l_{21}\cos\alpha_{32}+\right.\\
\left.+l_{22}\cos\alpha_{32})-c_4l_{21}l_3\cos\alpha_3\right]x_8+l_3^2\left(c_3\cos^2\alpha_{33}+c_4\cos^2\alpha_3\right)x_9=0.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Для рассмотрения и анализа колебательного процесса механической системы "кран-вибрационное технологическое оборудование" под действием вынуждающей силы необходимо свести систему из 9-ти дифференциальных уравнений (1…9) второго порядка к системе дифференциальных уравнений I-го порядка и решать ее численным методом.

В связи с тем, что в нашем случае обобщенные координаты имеют динамические связи и выражение кинетической энергии не имеет диагонального вида, то в трех дифференциальных уравнениях (2), (8) и (9) образовалось по три члена с высшей (второй) производной обобщенной координатой по времени, что делает невозможным понижение их порядка до первого и последующего их интегрирования без предварительных преобразований.

Сделаем соответствующие преобразования указанной системы дифференциальных уравнений (1…9), которая в матричной форме имеет такой вид

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + CX = F(t), \tag{10}$$

где M , B , и C – соответственно матрицы инерционных коэффициентов, коэффициентов демпфирования и коэффициентов жесткости;

$F(t)$ – вектор-столбец внешних сил.

$M = \lfloor m_{ij} \rfloor$ $(i = 1, 2, ..., n; \ j = 1, 2, ..., n; \ n \times n = 9 \times 9)$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \ldots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \ldots m_{2n} \\ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \\ m_{n1} & m_{n2} \ldots m_{nn} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Випишем ненулевые элементы матрицы M (11)

$m_{11} = m_1$; $m_{22} = (m_2 + m_3)$; $m_{28} = m_3 l_{21}$; $m_{29} = m_3 l_3 \cos\alpha_3$; $m_{33} = m_4$;

$m_{44} = m_5$; $m_{55} = m_6$; $m_{66} = m_7$; $m_{77} = J_1$; $m_{82} = m_3 l_{21}$; $m_{88} = J_2 + m_3 l_{21}^2$;

$m_{89} = m_3 l_{21} l_3 \cos\alpha_3$; $m_{92} = m_3 l_3 \cos\alpha_3$; $m_{98} = m_3 l_{21} l_3 \cos\alpha_3$; $m_{99} = m_3 l_3^2$.

$B = \lfloor \beta_{ij} \rfloor$ $(i = 1, 2, ..., n; \ j = 1, 2, ..., n; ; \ n \times n = 9 \times 9)$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \ldots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \ldots \beta_{2n} \\ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \ldots \beta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Випишем ненулевые элементы матрицы B (12)

$\beta_{11} = 2(\beta_1 + \beta_2)$; $\beta_{12} = -2\beta_2$; $\beta_{17} = -\beta_1(l_{11} - l_{12})$; $\beta_{18} = -2\beta_2 e_2$; $\beta_{21} = -2\beta_2$;
$\beta_{22} = 2\beta_2 + \beta_4 + \beta_6$; $\beta_{23} = -\beta_4$; $\beta_{25} = -\beta_6$; $\beta_{28} = 2\beta_2 e_2 + \beta_4 l_{21} + \beta_6 l_{62}$;

$\beta_{29} = \beta_4 l_3 \cos\alpha_3$; $\beta_{32} = -\beta_4$; $\beta_{33} = \beta_4 + \beta_5 + \beta_7$; $\beta_{34} = -\beta_5$; $\beta_{36} = -\beta_7$; $\beta_{38} = -\beta_4 l_{21}$;
$\beta_{39} = -\beta_4 l_3 \cos\alpha_3$; $\beta_{43} = -\beta_5$; $\beta_{44} = \beta_5$; $\beta_{52} - \beta_6$; $\beta_{55} = \beta_6$; $\beta_{58} = -\beta_6 l_{62}$; $\beta_{63} = -\beta_7$; $\beta_{66} = \beta_7$
; $\beta_{71} = -\beta_1(l_{11} - l_{12})$; $\beta_{77} = \beta_1(l_{11}^2 + l_{12}^2) + 2\beta_2 l_2^2$; $\beta_{78} = -2\beta_2 l_2^2$; $\beta_{81} = -2\beta_2 e_2$;

$\beta_{82} = 2\beta_2 e_2 + \beta_4 l_{21} + \beta_6 l_{62}$; $\beta_{83} = -\beta_4 l_{21}$; $\beta_{85} = -\beta_6 l_{62}$; $\beta_{87} - 2\beta_2 l_2^2$;

$\beta_{88} = 2\beta_2(e_2^2 + l_2^2) + \beta_3(l_{21}\cos\alpha_{32} + l_{22}\cos\alpha_{32})^2 + \beta_4 l_{21}^2 + \beta_6 l_{62}^2$;

$\beta_{89} = -\beta_3 l_3 \cos\alpha_{33}(l_{21}\cos\alpha_{32} + l_{22}\cos\alpha_{32}) - \beta_4 l_{21} l_3 \cos\alpha_3$; $\beta_{92} = \beta_4 l_3 \cos\alpha_3$;

$\beta_{93} = -\beta_4 l_3 \cos\alpha_3$; $\beta_{98} = -\beta_3 l_3 \cos\alpha_{33}(l_{21}\cos\alpha_{32} + l_{22}\cos\alpha_{32}) - \beta_4 l_{21} l_3 \cos\alpha_3$;

$\beta_{99} = l_3^2(\beta_3 \cos^2\alpha_{33} + \beta_4 \cos^2\alpha_3)$.

$C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ $(i = 1, 2, ..., n; \ j = 1, 2, ..., n; ; n \times n = 9 \times 9)$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Випишем ненулевые элементы матрицы C (13)

$$c_{11}=2(c_1+c_2);\;\; c_{12}=-2c_2;\;\; c_{17}=-c_1(l_{11}-l_{12});\;\; c_{18}=-2c_2e_2;\;\; c_{21}=-2c_2;$$

$$c_{22}=2c_2+c_4+c_6;\; c_{23}=-c_4;\; c_{25}=-c_6;\; c_{28}=2c_2e_2+c_4l_{21}+c_6l_{62};\; c_{29}=c_4l_3\cos\alpha_3;\; c_{32}=-c_4;$$

$$c_{33}=c_4+c_5+c_7;\; c_{34}=-c_5;\; c_{36}=-c_7;\; c_{38}=-c_4l_{21};\; c_{39}=-c_4l_3\cos\alpha_3;\; c_{43}=-c_5;\; c_{44}=c_5;$$

$$c_{52}-c_6;\; c_{55}=c_6;\; c_{58}=-c_6l_{62};\; c_{63}=-c_7;\; c_{66}=c_7;\; c_{71}=-c_1(l_{11}-l_{12});\; c_{77}=c_1\left(l_{11}^2+l_{12}^2\right)+2c_2l_2^2;$$

$$c_{78}=-2c_2l_2^2;\; c_{81}=-2c_2e_2;\; c_{82}=2c_2e_2+c_4l_{21}+c_6l_{62};\; c_{83}=-c_4l_{21};\; c_{85}=-c_6l_{62};\; c_{87}-2c_2l_2^2;$$

$$c_{88}=2c_2\left(e_2^2+l_2^2\right)+c_3\left(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32}\right)^2+c_4l_{21}^2+c_6l_{62}^2;$$

$$c_{89}=-c_3l_3\cos\alpha_{33}\left(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32}\right)-c_4l_{21}l_3\cos\alpha_3;\; c_{92}=c_4l_3\cos\alpha_3;$$

$$c_{93}=-c_4l_3\cos\alpha_3;\; c_{98}=-c_3l_3\cos\alpha_{33}\left(l_{21}\cos\alpha_{32}+l_{22}\cos\alpha_{32}\right)-c_4l_{21}l_3\cos\alpha_3;$$

$$c_{99}=l_3^2\left(c_3\cos^2\alpha_{33}+c_4\cos^2\alpha_3\right).$$

В развернутом матричном виде система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ m_{n1} & m_{n2} \dots m_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \dots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \dots \beta_{2n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \dots \beta_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Для дальнейшего преобразования системы уравнений найдем обратную матрицу для данной матрицы инерционных коэффициентов M (11) у которой определитель $\det M=\Delta\neq 0.$.

Создадим для матрицы M (11) так называемую присоединенную (союзную) матрицу M^*

$$M^*=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \dots M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} \dots M_{n2} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ M_{1n} & M_{2n} \dots M_{nn} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где M_{ij} – алгебраическое дополнение (миноры со знаками) соответствующих элементов $m_{ij}\,(i,j=1,2,\dots,n)$.

Разделим все элементы матрицы (15) на величину определителя матрицы M т. е. на Δ:

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta M} M^* = \begin{bmatrix} \frac{M_{11}}{\Delta} & \frac{M_{21}}{\Delta} \dots & \frac{M_{n1}}{\Delta} \\ \frac{M_{12}}{\Delta} & \frac{M_{22}}{\Delta} \dots & \frac{M_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \frac{M_{1n}}{\Delta} & \frac{M_{2n}}{\Delta} \dots & \frac{M_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} = A. \qquad (16)$$

Проверяем обратную матрицу на сингулярность, для чего умножим обратную матрицу (16) на входную (11).

Сложив произведение матриц $A \cdot M$, имеем:

$$A \cdot M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} \dots m_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{nn} \end{bmatrix} = E; \qquad (17)$$

$$E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} \dots m_{nn} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \dots e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} \dots e_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} \dots e_{nn} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

здесь элементы матрицы E по диагонали должны быть равными единице т. е. $e_{11} = e_{22} = e_{nn} = 1$.

Умножим все составляющие уравнений (10) на обратную матрицу A (16), получим новую систему дифференциальных уравнений

$$A \cdot M \cdot \ddot{X} + A \cdot B \cdot \dot{X} + A \cdot C \cdot X = A \cdot F(t). \qquad (18)$$

Тогда система уравнений (18) примет вид

$$\ddot{X} + A \cdot B \cdot \dot{X} + A \cdot C \cdot X = A \cdot F(t) \qquad (19)$$

Сделаем следующую замену в системе (19) дифференциальных уравнений

$$A \cdot B = K; \quad A \cdot C = N; \quad A \cdot F(t) = U.$$

В развернутом виде эти выражения будут иметь следующий вид

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \dots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \dots \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \dots \beta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \dots \kappa_{1n} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \dots \kappa_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \kappa_{n1} & \kappa_{n2} \dots \kappa_{nn} \end{bmatrix} = K; \qquad (20)$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \dots n_{1n} \\ n_{21} & n_{22} \dots n_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ n_{n1} & n_{n2} \dots n_{nn} \end{bmatrix} = N; \qquad (21)$$

$$A \cdot F(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \sin \omega t \\ p_2 \sin \omega t \\ \dots \\ p_n \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = U \,. \qquad (22)$$

где $F(t) = P \sin \omega t$ – вектор-столбец вынуждающей силы.

Подставив значения выражений (20), (21) і (22) в (19) получим новую систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\ddot{X} + K\dot{X} + NX = U \,. \qquad (23)$$

Перепишем систему (23) дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + \kappa_{11}\dot{x}_1 - \kappa_{12}\dot{x}_2 - \kappa_{17}\dot{x}_7 - \kappa_{18}\dot{x}_8 + n_{11}x_1 - n_{12}x_2 - n_{17}x_7 - n_{18}x_8 = u_1 \,; \\
&\ddot{x}_2 - \kappa_{21}\dot{x}_1 + \kappa_{22}\dot{x}_2 - \kappa_{23}\dot{x}_3 - \kappa_{25}\dot{x}_5 - \kappa_{28}\dot{x}_8 + \kappa_{29}\dot{x}_9 - \\
&- n_{21}x_1 + n_{22}x_2 - n_{23}x_3 - n_{25}x_5 - n_{28}x_8 + n_{29}x_9 = u_2 \,; \\
&\ddot{x}_3 - \kappa_{32}\dot{x}_2 + \kappa_{33}\dot{x}_3 - \kappa_{34}\dot{x}_4 - \kappa_{36}\dot{x}_6 - \kappa_{38}\dot{x}_8 - \kappa_{39}\dot{x}_3 - \\
&- n_{32}x_2 + n_{33}x_3 - n_{34}x_4 - n_{36}x_6 - n_{38}x_8 - n_{39}x_9 = u_3 \,; \\
&\ddot{x}_4 - \kappa_{43}\dot{x}_3 + \kappa_{44}\dot{x}_4 - n_{43}x_3 + n_{44}x_4 = u_4 ; \\
&\ddot{x}_5 - \kappa_{52}\dot{x}_2 + \kappa_{55}\dot{x}_5 - \kappa_{58}\dot{x}_8 - n_{52}x_2 + n_{55}x_5 - n_{58}x_8 = u_5 \\
&\ddot{x}_6 - \kappa_{63}\dot{x}_3 + \kappa_{66}\dot{x}_6 - n_{63}x_3 + n_{66}x_6 = u_6 \,; \\
&\ddot{x}_7 - \kappa_{71}\dot{x}_1 + \kappa_{77}\dot{x}_7 - \kappa_{78}\dot{x}_8 - n_{71}x_7 + n_{77}x_7 - n_{78}x_8 = u_7 \,; \\
&\ddot{x}_8 - \kappa_{81}\dot{x}_1 + \kappa_{82}\dot{x}_2 + \kappa_{83}\dot{x}_3 - \kappa_{85}\dot{x}_5 + \kappa_{87}\dot{x}_7 + \kappa_{88}\dot{x}_8 - \kappa_{89}\dot{x}_9 - \\
&- n_{81}\dot{x}_1 + n_{82}x_2 + n_{83}x_3 - n_{85}x_5 + n_{87}x_7 + n_{88}x_8 - n_{89}\dot{x}_9 = u_8 \,; \\
&\ddot{x}_9 + \kappa_{92}\dot{x}_2 - \kappa_{93}\dot{x}_3 - \kappa_{98}\dot{x}_8 + \kappa_{99}\dot{x}_9 + n_{92}x_2 - n_{93}x_3 - n_{98}x_8 + n_{99}x_9 = u_9 \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Здесь $u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 0$, а $u_4 = P_5 \sin \omega_5 t = M_{\text{ст}} \omega_5^2 \sin(\omega_5 + t)$ или $u_4 = M_{\text{ст}} \omega_5^2 \sin(\omega_5 + t)$,

где $M_{\text{ст}}$ – статический момент массы дебалансов вибратора; ω_5 – угловая частота вращения дебалансных валов вибратора; t – шаг интегрирования по времени.

Сведем систему дифференциальных уравнений второго порядка (24) к удобному виду первого порядка для интегрирования ее методом Рунге-Кутта, для чего переносим элементы с коэффициентами демпфирования и жесткости вместе с вынуждающей силой в правую часть уравнений со сменой всех знаков:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_1=-\kappa_{11}\dot{x}_1+\kappa_{12}\dot{x}_2-\kappa_{17}\dot{x}_7+\kappa_{18}\dot{x}_8+n_{11}x_1+n_{12}x_2-n_{17}x_7+n_{18}x_8+u_1;\\
&\ddot{x}_2=\kappa_{21}\dot{x}_1-\kappa_{22}\dot{x}_2+\kappa_{23}\dot{x}_3+\kappa_{25}\dot{x}_5+\kappa_{28}\dot{x}_8-\kappa_{29}\dot{x}_9+\\
&+n_{21}x_1-n_{22}x_2+n_{23}x_3+n_{25}x_5+n_{28}x_8-n_{29}x_9+u_2;\\
&\ddot{x}_3=\kappa_{32}\dot{x}_2-\kappa_{33}\dot{x}_3+\kappa_{34}\dot{x}_4+\kappa_{36}\dot{x}_6+\kappa_{38}\dot{x}_8+\kappa_{39}\dot{x}_9+\\
&\ +n_{32}x_2-n_{33}x_3+n_{34}x_4+n_{36}x_6+n_{38}x_8+n_{39}x_9+u_3;\\
&\ddot{x}_4=\kappa_{43}\dot{x}_3-\kappa_{44}\dot{x}_4+n_{43}x_3-n_{44}x_4+u_4;\\
&\ddot{x}_5=\kappa_{52}\dot{x}_2-\kappa_{55}\dot{x}_5+\kappa_{58}\dot{x}_8+n_{52}x_2-n_{55}x_5+n_{58}x_8+u_5;\\
&\ddot{x}_6=\kappa_{63}\dot{x}_3-\kappa_{66}\dot{x}_6+n_{63}x_3-n_{66}x_6+u_6;\\
&\ddot{x}_7=\kappa_{71}\dot{x}_1-\kappa_{77}\dot{x}_7+\kappa_{78}\dot{x}_8+n_{71}x_1+n_{77}x_7+n_{78}x_8+u_7;\\
&\ddot{x}_8=\kappa_{81}\dot{x}_1-\kappa_{82}\dot{x}_2-\kappa_{83}\dot{x}_3+\kappa_{85}\dot{x}_5-\kappa_{87}\dot{x}_7-\kappa_{88}\dot{x}_8+\kappa_{89}\dot{x}_9+\\
&+n_8x_1-n_{82}x_2-n_{83}x_3+n_{85}x_5-n_{87}x_8-n_{88}x_8+n_{89}x_9+u_8;\\
&\ddot{x}_9=-\kappa_{92}\dot{x}_2+\kappa_{93}\dot{x}_3+\kappa_{98}\dot{x}_8-\kappa_{99}\dot{x}_9-n_{92}x_2+n_{93}x_3+n_{98}x_8-n_{99}x_9+u_9.
\end{aligned}\right\}\qquad (25)$$

Сделаем замену переменных в системе дифференциальных уравнений (25)

$x_1=Y(1)$	$x_2=Y(3)$	$x_3=Y(5)$	$x_4=Y(7)$	$x_5=Y(9)$	$x_6=Y(11)$	$x_7=Y(13)$	$x_8=Y(15)$	$x_9=Y(17)$
$\dot{x}_1=Y(2)$	$\dot{x}_2=Y(4)$	$\dot{x}_3=Y(6)$	$\dot{x}_4=Y(8)$	$\dot{x}_5=Y(10)$	$\dot{x}_6=Y(12)$	$\dot{x}_7=Y(14)$	$\dot{x}_8=Y(16)$	$\dot{x}_9=Y(18)$
$\ddot{x}_1=\dot{Y}(2)$	$\ddot{x}_2=\dot{Y}(4)$	$\ddot{x}_3=\dot{Y}(6)$	$\ddot{x}_4=\dot{Y}(8)$	$\ddot{x}_5=\dot{Y}(10)$	$\ddot{x}_6=\dot{Y}(12)$	$\ddot{x}_7=\dot{Y}(14)$	$\ddot{x}_8=\dot{Y}(16)$	$\ddot{x}_9=\dot{Y}(18)$
$\dot{Y}(2)=F(2)$	$\dot{Y}(4)=F(4)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$	$\dot{Y}(6)=F(6)$

После чего получим

$$x_1=Y(1)\qquad \dot{x}_1=Y(2)\qquad \ddot{x}_1=\dot{Y}(2)=F(2)\qquad \dot{Y}(1)=Y(2)=F(1)$$

$$x_2=Y(3)\qquad \dot{x}_2=Y(4)\qquad \ddot{x}_2=\dot{Y}(4)=F(4)\qquad \dot{Y}(3)=Y(4)=F(3)$$

$$x_3=Y(5)\qquad \dot{x}_3=Y(6)\qquad \ddot{x}_3=\dot{Y}(6)=F(6)\qquad \dot{Y}(5)=Y(6)=F(5)$$

$$x_4=Y(7)\qquad \dot{x}_4=Y(8)\qquad \ddot{x}_4=\dot{Y}(8)=F(8)\qquad \dot{Y}(7)=Y(8)=F(7)$$

$$x_5=Y(9)\qquad \dot{x}_5=Y(10)\qquad \ddot{x}_5=\dot{Y}(10)=F(10)\qquad \dot{Y}(9)=Y(10)=F(9)$$

$$x_6=Y(11)\qquad \dot{x}_6=Y(12)\qquad \ddot{x}_6=\dot{Y}(12)=F(12)\qquad \dot{Y}(11)=Y(12)=F(11)$$

$$x_7=Y(13)\qquad \dot{x}_7=Y(14)\qquad \ddot{x}_7=\dot{Y}(14)=F(14)\qquad \dot{Y}(13)=Y(14)=F(13)$$

$$x_8=Y(15)\qquad \dot{x}_8=Y(16)\qquad \ddot{x}_8=\dot{Y}(16)=F(16)\qquad \dot{Y}(15)=Y(16)=F(15)$$

$$x_9=Y(17)\qquad \dot{x}_9=Y(18)\qquad \ddot{x}_9=\dot{Y}(18)=F(18)\qquad \dot{Y}(17)=Y(18)=F(17)$$

Подставим в систему уравнений (25) новые переменные и значения $u_1 ... u_9$, а также замену в правой части $\dot{Y}_{(\mathrm{i})}$ на $F_{(\mathrm{i})}$ $(\mathrm{i}=1,\,2,\,...,\,18)$, получим систему из 18 дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих процесс вынужденных колебаний механической системы "КВТО" с последующим использованием для численного интегрирования:

$$F_1 = Y_2;$$

$$F_2 = \kappa_{11}\dot{x}_1 + \kappa_{12}\dot{x}_2 + \kappa_{17}\dot{x}_7 + \kappa_{18}\dot{x}_8 + n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + n_{17}x_7 + n_{18}x_8;$$

$$F_3 = Y_4;$$

$$F_4 = \kappa_{21}\dot{x}_1 + \kappa_{22}\dot{x}_2 + \kappa_{23}\dot{x}_3 + \kappa_{25}\dot{x}_5 + \kappa_{28}\dot{x}_8 + \kappa_{29}\dot{x}_9 +$$

$$+ n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + n_{23}x_3 + n_{25}x_5 + n_{28}x_8 + n_{29}x_9;$$

$$\dot{Y}_5 = Y_6$$

$$F_6 = \kappa_{32}\dot{x}_2 + \kappa_{33}\dot{x}_3 + \kappa_{34}\dot{x}_4 + \kappa_{36}\dot{x}_6 + \kappa_{38}\dot{x}_8 + \kappa_{39}\dot{x}_9 +$$

$$+ n_{32}x_2 + n_{33}x_3 + n_{34}x_4 + n_{36}x_6 + n_{38}x_8 + n_{39}x_9;$$

$$F_7 = Y_8$$

$$F_8 = \kappa_{43}\dot{x}_3 + \kappa_{44}\dot{x}_4 + n_{43}x_3 + n_{44}x_4 + u_4;$$

$$F_9 = Y_{10};$$

$$F_{10} = \kappa_{52}\dot{x}_2 + \kappa_{55}\dot{x}_5 + \kappa_{58}\dot{x}_8 + n_{52}x_2 + n_{55}x_5 - n_{58}x_8; \tag{26}$$

$$F_{11} = Y_{12}$$

$$F_{12} = \kappa_{63}\dot{x}_3 + \kappa_{66}\dot{x}_6 + n_{63}x_3 + n_{66}x_6;$$

$$F_{13} = Y_{14};$$

$$F_{14} = \kappa_{71}\dot{x}_1 + \kappa_{77}\dot{x}_7 + \kappa_{78}\dot{x}_8 + n_{71}x_1 + n_{77}x_7 + n_{78}x_8;$$

$$F_{15} = Y_{16};$$

$$F_{16} = \kappa_{81}\dot{x}_1 + \kappa_{82}\dot{x}_2 + \kappa_{83}\dot{x}_3 + \kappa_{85}\dot{x}_5 + \kappa_{87}\dot{x}_7 + \kappa_{88}\dot{x}_8 + \kappa_{89}\dot{x}_9 +$$

$$+ n_{81}x_1 + n_{82}x_2 + n_{83}x_3 + n_{85}x_5 + n_{87}x_8 + n_{88}x_8 + n_{89}x_9;$$

$$F_{17} = Y_{18}$$

$$F_{18} = \kappa_{92}\dot{x}_2 + \kappa_{93}\dot{x}_3 + \kappa_{98}\dot{x}_8 + \kappa_{99}\dot{x}_9 + n_{92}x_2 + n_{93}x_3 + n_{98}x_8 + n_{99}x_9.$$

Сделаем проверку на правильность составленных дифференциальных уравнений с использованием матриц K и N.

$$K=\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{17} & \kappa_{18} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} & 0 & \kappa_{25} & 0 & 0 & \kappa_{28} & \kappa_{29} \\ 0 & \kappa_{32} & \kappa_{33} & \kappa_{34} & 0 & \kappa_{36} & 0 & \kappa_{38} & \kappa_{39} \\ 0 & 0 & \kappa_{43} & \kappa_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{52} & 0 & 0 & \kappa_{55} & 0 & 0 & \kappa_{58} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{63} & 0 & 0 & \kappa_{66} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{77} & \kappa_{78} & 0 \\ \kappa_{81} & \kappa_{82} & \kappa_{83} & 0 & \kappa_{85} & 0 & \kappa_{87} & \kappa_{88} & \kappa_{89} \\ 0 & \kappa_{92} & \kappa_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{98} & \kappa_{99} \end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{17} & n_{18} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & 0 & n_{25} & 0 & 0 & n_{28} & n_{29} \\ 0 & n_{32} & n_{33} & n_{34} & 0 & n_{36} & 0 & n_{38} & n_{39} \\ 0 & 0 & n_{43} & n_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{52} & 0 & 0 & n_{55} & 0 & 0 & n_{58} & 0 \\ 0 & 0 & n_{63} & 0 & 0 & n_{66} & 0 & 0 & 0 \\ n_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{77} & n_{78} & 0 \\ n_{81} & n_{82} & n_{83} & 0 & n_{85} & 0 & n_{87} & n_{88} & n_{89} \\ 0 & n_{92} & n_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{98} & n_{99} \end{bmatrix}$$

Уравнения составлены правильно, т. к. полученные матрицы есть симметричны.

В конечном виде система (26) из 18 дифференциальных уравнений, описывающие колебательный процесс механической системы "кран-вибрационное технологгическое оборудование" для использования в расчетах на ЭВМ в основной програмне имеет вид:

$\mathrm{F}(1)=\mathrm{Y}(2);$

$\mathrm{F}(2)=-\mathrm{K}(11)*\mathrm{Y}(2)-\mathrm{K}(12)*\mathrm{Y}(4)-\mathrm{K}(17)*\mathrm{Y}(14)-K(18)*Y(16)-$

$-\mathrm{N}(11)*\mathrm{Y}(1)-\mathrm{N}(12)*\mathrm{Y}(3)-\mathrm{N}(17)*\mathrm{Y}(13)-\mathrm{N}(18)*\mathrm{Y}(15)+U(1);$

$\mathrm{F}(3)=\mathrm{Y}(4);$

$\mathrm{F}(4)=-\mathrm{K}(21)*\mathrm{Y}(2)-\mathrm{K}(22)*\mathrm{Y}(4)-\mathrm{K}(23)*\mathrm{Y}(6)-\mathrm{KKB}(25)*\mathrm{Y}(10)-\mathrm{KB}(28)*\mathrm{Y}(16)-$

$-\mathrm{K}(29)*\mathrm{Y}(18)-\mathrm{N}(21)*\mathrm{Y}(1)-\mathrm{N}(22)*\mathrm{Y}(3)-\mathrm{NN}(23)*\mathrm{Y}(5)-$

$-\mathrm{N}(25)*\mathrm{Y}(9)-\mathrm{N}(28)*\mathrm{Y}(15)-\mathrm{N}(29)*\mathrm{Y}(17)+U(2);$

$\mathrm{F}(5)=\mathrm{Y}(6);$

$\mathrm{F}(6)=-\mathrm{K}(32)*\mathrm{Y}(4)-\mathrm{K}(33)*\mathrm{Y}(6)-\mathrm{K}(34)*\mathrm{Y}(8)-\mathrm{KB}(36)*\mathrm{Y}(12)-$

$-\mathrm{K}(38)\mathrm{Y}(16)-\mathrm{K}(39)\mathrm{Y}(18)-\mathrm{N}(32)\mathrm{Y}(3)-\mathrm{NC}(33)\mathrm{Y}(5)-$

$$-N(34)Y(7)-N(36)Y(11)-NC(38)Y(15)-N(39)Y(17)+U(3);$$

$$F(7)=Y(8);$$

$$F(8)=-K(43)Y(6)-KB(44)Y(8)-N(43)Y(5)-N(44)Y(7)+U(4);$$

$$F(9)=Y(10);$$

$$F(10)=-K(52)Y(4)-K(55)Y(10)-K(58)Y(16)-$$
$$-N(52)Y(3)-N(55)Y(9)-N(58)Y(15)+U(5);$$

$$F(11)=Y(12);$$

$$F(12)=-K(63)Y(6)-K(66)Y(12)-N(63)Y(5)-N(66)Y(11)+U(6)$$

$$F(13)=Y(14);$$

$$F(14)=-K(71)Y(2)-K(77)Y(14)-N(71)Y(1)-N(77)Y(13)+U(7);$$

$$F(15)=Y(16);$$

$$F(16)=-K(81)Y(2)-K(82)Y(4)-K(83)Y(6)-KB(85)Y(10)-K(87)Y(14)-$$

$$-KB(88)Y(16)-K(89)Y(18)-N(81)Y(1)-N(82)Y(3)-N(83)Y(5)-$$

$$-N(85)Y(9)-N(87)Y(13)-N(88)Y(15)-N(89)Y(17)+U(8);$$

$$F(17)=Y(18);$$

$$F(18)=-K(92)Y(4)-K(93)Y(6)-K(98)Y(16)-K(99)Y(18)-$$

$$-N(92)Y(3)-N(93)Y(5)-NC(98)Y(15)-N(99)Y(17)+U(9).$$

Таким образом, выполнены преобразования математической модели процесса взаимодействия стрелового самоходного крана с вибрационным технологическим оборудованием на крюке, в виде дифференциальных уравнений второго порядка с динамическими связями, в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка пригодных для ввода в основную программу для машинного счета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко А. Ф. Динамические модели грузоподъемных кранов с навесным технологическим оборудованием / А. Ф. Шевченко, Н. П. Колесник // Подъемно-транспортная техника. М.: Гротек, – 2002. – С. 93 – 100.

2. Шевченко А.Ф. Віброзахист стрілового самохідного крана з вібраційним технологічним обладнанням на гаку / А. Ф. Шевченко, М. П. Колісник, А. Л. Червоноштан // Проблеми розвитку дорожньо-транспортного і будівельного комплексів. / Збірник статей і тез міжнар. Наук.-прак. конф., 03-05 жовтня 2013 р.. – Кіровоград, ПП "Ексклюзив-Систем, 2013. С. 148 – 151.