

УДК 536.421

**ВЛИЯНИЕ ВОЗДУШНОГО ЗАЗОРА НА ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА
ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛИТКА В КЛИНООБРАЗНОЙ ИЗЛОЖНИЦЕ**

В. В. Дремов*, д. т. н., доц., **О. А. Калашникова****, асс.

**Донбасская Национальная Академия Строительства и Архитектуры*

***Донецкий Национальный Технический Университет*

Вариационным методом решена нестационарная задача затвердевания металла в изложницах с различной теплопроводностью стенок.

ВВЕДЕНИЕ

При затвердевании слитка в изложнице происходит усадка металла и между слитком и изложницей образуется воздушный зазор. Учет влияния воздушного зазора более адекватно описывает реальный процесс затвердевания слитка [1,2]. В предлагаемой работе исследуется влияние ширины воздушного зазора на скорость движения фронта затвердевания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении данной задачи последовательная кристаллизация происходит в клинообразной изложнице с боковыми поверхностями, расположенными под малым углом $2\alpha_1$. Сверху и снизу данная область ограничена цилиндрическими поверхностями радиусами R_1 и R_2 . В решении задачи используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) . На поверхности $R = r_2$ полагаем $T_H = const$. При $t > 0$ начинается процесс кристаллизации и на фронте кристаллизации $T = T_K$. Тогда уравнение теплопереноса в области жидкого металла запишется в следующем виде:

$$\rho_1 C_{r1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right) \quad (1)$$

при $0 < \varphi < \varphi_\phi$; $r_\phi < r < R_2$. Фронт кристаллизации можно найти по формуле [3]: $\varepsilon(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = r_\phi(t_\phi)(\alpha_1 - \varphi_\phi(t_\phi))$.

В момент $t=0$ твердая фаза отсутствует, а $T_1(r, \varphi, 0) = T_H$ при $R_1 < r < R_2$ и $0 < \varphi < \alpha_1$. На фронте кристаллизации:

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_K. \quad (3)$$

При $r = r_\phi(t)$, $\varphi = \varphi_\phi(t)$ имеем:

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_2(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_K \quad (4)$$

На движущемся фронте фазового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации L_1 , которая вместе с теплом перегрева отводится через твердую фазу, воздушную прослойку, изложницу и выделяется в окружающую среду. Поэтому:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{r \partial \varphi} + L_1 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = K_{T_1} (T_K - T_{CP}), \quad (5)$$

Коэффициент теплопередачи K_{T_1} учитывает тепловое сопротивление стенки изложницы, затвердевшей корки, воздушной прослойки и теплоотдачу в окружающую среду:

$$K_{T_1} = \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{r_\phi (\alpha_3 - \phi_\phi)}{\lambda_2} + \frac{r_\phi (\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda_3} + \frac{r_\phi (\alpha_1 - \alpha_3)}{\lambda_4} \right)^{-1}, \quad (6)$$

где α_1 - угол между вертикальной осью и внутренней стенкой изложницы, α_2 - угол между вертикальной осью и наружной стенкой изложницы, α_3 - угол между вертикальной осью и наружной поверхностью слитка. Уравнение (5) теплового баланса на фронте кристаллизации используется для определения $\varepsilon(t)$. Из уравнений (1) - (2) и граничных условий (3) - (6) найдем функции $T_1(r, \varphi, t)$ и $\varepsilon(t)$. Уравнение (1) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

где
$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 C_{r1}}. \quad (8)$$

Найдем точное решение по r . Решением является функция:

$$T_1 = C_1 \ln r + C_2. \quad (9)$$

Используя граничные условия: $T_1 = T_H$ при $r = R_2$ и (3), найдем константы C_1 и C_2 . Таким образом, точное решение по r уравнения (9) имеет вид:

$$T_1(r) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \quad (10)$$

Далее приближенное решение по φ уравнения (7) ищем вариационным методом, постепенно усложняя задачу. Вначале найдем зависимость от φ для стационарного случая. Введем новые обозначения производных

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = T_r, \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = T_{rr}, \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} = T_{\varphi\varphi}. \quad \text{Тогда уравнение (7) примет вид}$$

$$\frac{V_r}{a_1} r T_r - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} = 0. \quad (11)$$

Запишем функционал, соответствующий уравнению (11), в виде:

$$L = \int_{r_\phi}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{V_r}{a_1} r T_r^0 T + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right] dr d\varphi, \quad (12)$$

где $T_r^0 = \frac{\partial T^0}{\partial r}$, а индекс ноль при T_r обозначает неварьируемую производную

от температуры.

Функцию, минимизирующую функционал (12), ищем в виде

$$T = T(r)f(\varphi) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} f(\varphi) \quad (13)$$

Найдем производные, T_r , T_r^0 , T_φ . Подставим их в (11) и, проинтегрировав по r , получим

$$L = \int_0^{\varphi_\phi} [A_1 f^0(\varphi) f(\varphi) + B_1 f^2(\varphi) + C_1 (f'(\varphi))^2] d\varphi, \quad (14)$$

где A_1, B_1, C_1 - константы интегрирования по r .

Функцию $f(\varphi)$ выбираем так, чтобы интеграл (14) был минимальным, что соответствует выполнению уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} = 0. \quad (15)$$

Возьмем производные от (14) и подставим в уравнение (15). В результате получим

$$f''(\varphi) - K_1 f(\varphi) = 0, \quad (16)$$

где $K_1 = \sqrt{\frac{A_1 + 2B_1}{2C_1}}$.

А, решая уравнение (16) имеем:

$$f(\varphi) = \frac{ch(K_1 \varphi)}{ch(K_1 \varphi_\phi)}. \quad (17)$$

Следовательно, решением (11) по r и по φ является функция

$$T_1(r, \varphi) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \cdot \frac{ch(K_1 \varphi)}{ch(K_1 \varphi_\phi)} \quad (18)$$

Поиск полного нестационарного решения уравнения теплопроводности в жидкой фазе осуществляется аналогично нахождению зависимости по φ .

Решением уравнения (1) будет функция

$$T_1(r, \varphi, t) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \cdot \frac{ch(K_1 \varphi)}{ch(K_1 \varphi_\phi)} e^{-\frac{G_1(t-t_0)}{M_1}} \quad (19)$$

Используя уравнение (5), соотношение (2), и учитывая (19), найдем:

$$r_\phi = \sqrt{C^* t + R_1^2}, \quad (20)$$

где $C^* = \frac{2}{L_1 \rho (\alpha_1 - \varphi_\phi)} W$,

$$W = (T_K - T_{CP})r_\phi K_{T1} - \lambda_1 T_K K_1 th(K_1 \varphi_\phi) .$$

По формуле (20) выполнены численные расчеты для следующих параметров металла, изложницы и окружающей среды: $R_1=1,2$ м, $R_2=2,2$ м, $\alpha_1=10^\circ$, $\alpha_2=12^\circ$, $\alpha_3 = 9,95^\circ$; $T_H=1833$ К, $T_K=1733$ К, $T_{CP}=300$ К, $\rho=7,31 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1=26,5$ Вт/м·К, $\lambda_2=30,3$ Вт/м·К, $\lambda_4 = 0,09$ Вт/м·К, $a_1=4,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\nu_r=0,3 \cdot 10^{-5}$ м/с, $L_1=2,72 \cdot 10^5$ Дж/кг. Для чугунной изложницы: $\alpha_0=68$ Вт/м²·К, $\lambda_3=58,7$ Вт/м·К. Для керамической формы: $\alpha_0=20$ Вт/м²·К, $\lambda_3=20$ Вт/м·К.

По полученным результатам построены графики $r_\phi(\varphi_\phi)$ для чугунной и керамической изложниц.

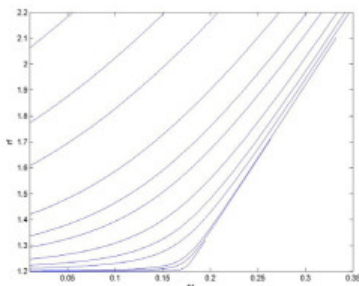


Рис. 1.

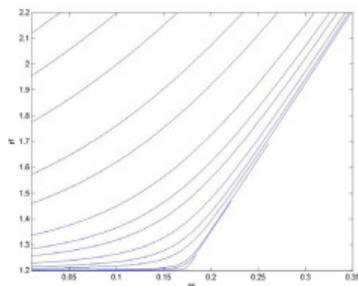


Рис. 2.

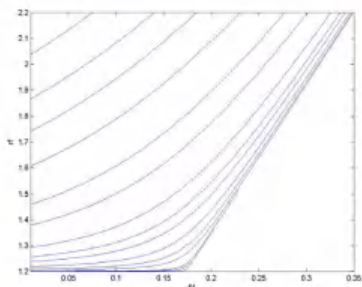


Рис. 3.

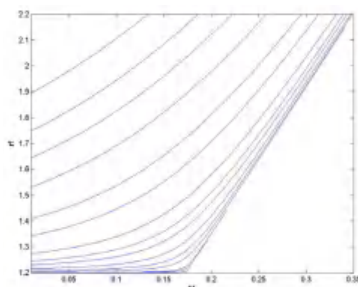


Рис. 4.

Положения фронта кристаллизации в правой половине клинообразных изложниц с различной теплопроводностью стенок в моменты времени: $t = 1$ с; 5с; 10с; 50с; 100с; 200с; 400с; 600с; 1000с; 2000с; 3000с; 5000с; 7000с; 9000с; 12000с после начала кристаллизации (отсчет кривых ведется снизу вверх в каждом рисунке).

Описание графиков

На рисунке 1 представлены графики положения фронта затвердевания для чугуновой изложницы, на рисунке 3 – для керамической формы без учета воздушной прослойки, образующейся между стенками изложницы и затвердевающим слитком. На рисунке 2 (чугун), 4 (керамика) представлены графики затвердевания стального слитка, где толщина воздушной прослойки $\delta = 3$ мм. Из сравнения видно, что воздушная прослойка значительно замедляет движение фронта затвердевания.

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

ε - толщина затвердевшей корки, λ_1 - коэффициент теплопроводности жидкого металла, λ_2 - коэффициент теплопроводности в твердой фазе, λ_3 - коэффициент теплопроводности материала изложницы, λ_4 - коэффициент теплопроводности воздуха, ρ - плотность, L_1 - скрытая теплота кристаллизации на единицу массы, β - коэффициент теплоотдачи, V_r - скорость конвекции, a_1 - температуропроводность жидкого металла, K_{T1} - коэффициент теплопередачи, T_K - температура кристаллизации, T_H - начальная температура, T_{CP} - температура окружающей среды, δ - толщина воздушной прослойки.

Использованная литература

1. Вейник А.И. Теплообмен между слитком и изложницей. – М. – Металлургиздат. –1959. –С.265.
2. Самойлович Ю.А. Стальной слиток / Ю.А. Самойлович, В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, В.В. Филиппов. Т.2. Затвердевание и охлаждение. – Минск. Белорусская наука, 2000. – С.640.
3. Дремов В.В. Влияние теплопроводности стенок изложницы на движение фронта затвердевания плоского слитка./ В.В. Дремов, Ф.В. Недопекин, О.А. Минакова // Металлургическая теплотехника. Сборник научных трудов. Национальная металлургическая академия Украины. – Днепропетровск. “Пороги”. – 2009. –С.67–72.