

*Руднев Е.С.  
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)*

## **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ $H_2$ , $H_\infty$ И $\mu$ -РЕГУЛЯТОРОВ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СИНХРОННЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ**

*У статті наведений порівняльний аналіз  $H_2$ ,  $H_\infty$  і  $\mu$ -регуляторів робастних систем керування на базі синхронного електропривода. Синтезовані регулятори забезпечують системі керування робастні характеристики якості та задану точність підтримання швидкості.*

***Ключові слова:** робастне керування,  $H_2$ ,  $H_\infty$  і  $\mu$ -регулятори, синхронний електропривод.*

*В статье приведен сравнительный анализ  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторов робастных систем управления на базе синхронного электропривода. Синтезированные регуляторы обеспечивают системе управления робастные характеристики качества и заданную точность поддержания скорости.*

***Ключевые слова:** робастное управление,  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторы, синхронный электропривод.*

**Введение.** Проектирование и эксплуатация систем автоматического управления промышленными объектами показала, что системы, синтезированные по критериям модульного и симметричного оптимумов, а также по квадратичному критерию качества, чувствительны к изменениям параметров объектов управления, характеристикам входных, возмущающих воздействий, к изменениям структуры и параметров модели объекта управления, которая используется в контурах управления. Такие системы могут терять и оптимальность, и работоспособность, если информация об объекте и среде функционирования известна с некоторой достоверностью или неопределённостью. Неопределённость (ошибка) в модели и знаниях о внешней среде приводит к решению задачи синтеза регулятора и системы управления в целом в условиях этой неопределённости [1-2].

Для промышленного электропривода особенно значимы изменения момента нагрузки, момента инерции вращающихся частей, активного сопротивления, напряжения питания и характеристик окружающей среды. Эти изменения влияют как на жесткость механических характе-

ристик, так и на качество переходных процессов. Вследствие этого в последнее время получили развитие методы синтеза робастных систем управления ( $H_2/H_\infty$ -оптимизация,  $\mu$ -синтез), не являющиеся адаптивными, но обеспечивающие необходимое качество работы при изменении характеристик воздействий и нестабильности параметров объекта управления (ОУ) в широком диапазоне.

**Цель работы.** Целью данной работы является сравнительный анализ синтезированных авторами в предыдущих работах [3-5]  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторов робастных систем управления синхронным электроприводом.

**Материал и результаты исследования.** В качестве объекта управления принят электропривод переменного тока на базе синхронного электродвигателя с постоянными магнитами (СДПМ) и управляемым преобразователем частоты (ПЧ). Математическое описание ОУ приведено в [3-4]. На рис. 1 представлена структурная схема отдельного канала регулирования скорости синхронного серводвигателя с возбуждением от постоянных магнитов.

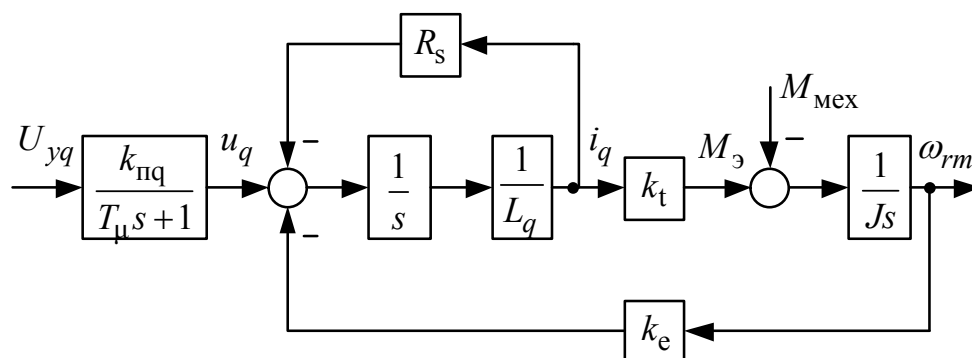


Рисунок 1 - Структурная схема моментобразующего контура СДПМ с учетом инерционности ПЧ

Математическое описание неопределенностей, которые либо точно не известны, либо изменяются в процессе работы электропривода, представленных как линейное дробное преобразование (ЛДП), определение динамики входов/выходов системы в матричном представлении с учетом неопределенностей как  $\mathbf{G}(s)$  – матрица передаточных функции (МПФ), а также последовательность преобразования структурных схем ОУ с неопределенными параметрами, рассмотрены авторами в [5].

Для дальнейшего синтеза  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторов робастной системы управления необходимо создание обобщенного объекта  $\mathbf{P}$ , а точнее его МПФ, включающего в себя весовые функции  $\mathbf{W}_S$ ,  $\mathbf{W}_R$  и  $\mathbf{W}_T$ , которые «накладывают штраф» на сигнал ошибки, сигнал управления и выходной сигнал соответственно, а также МПФ ОУ  $\mathbf{G}$  с неопределен-

ностями, т.е. формирование замкнутого контура смешанной задачи чувствительности (weighted mixed-sensitivity loop-shaping). Структурная схема обобщенного объекта  $\mathbf{P}$  с весовыми функциями (смешанная задача чувствительности  $\mathbf{S} / \mathbf{R} / \mathbf{T}$  - mixed-sensitivity problem) изображена на рис. 2.

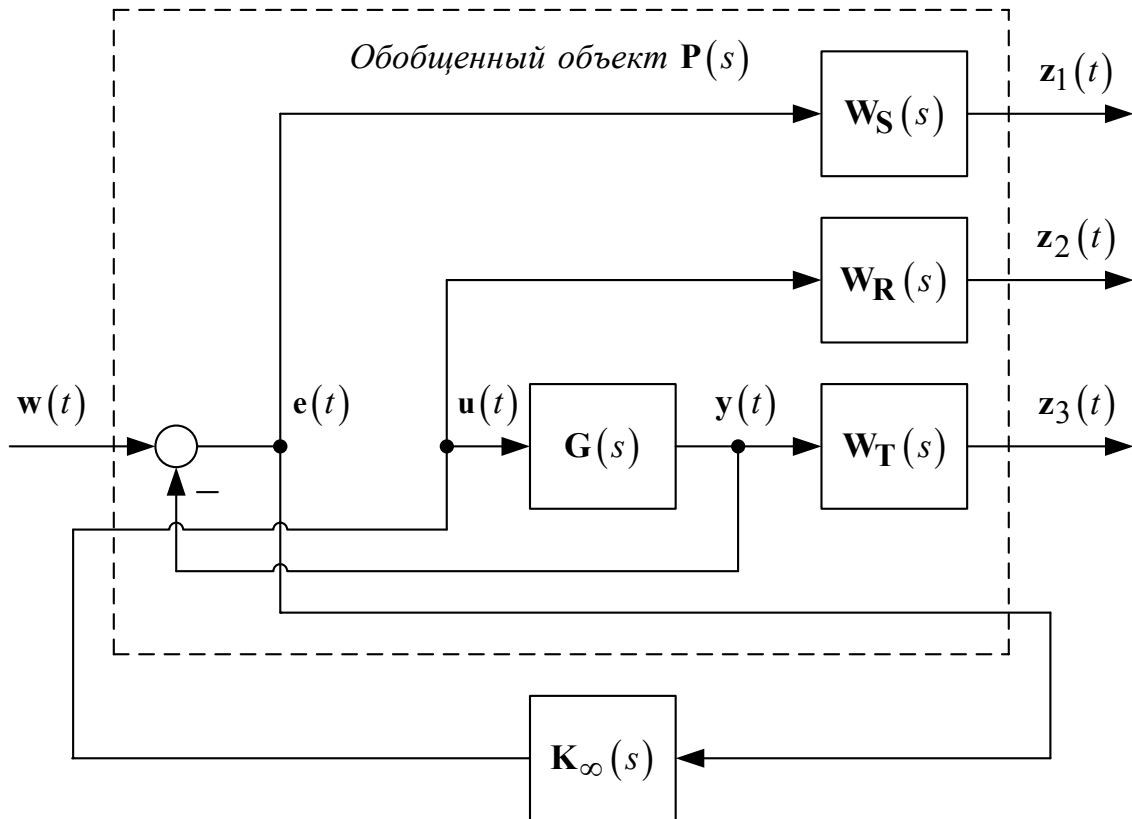


Рисунок 2 – Структурная схема обобщенного объекта  $\mathbf{P}(s)$

На рис. 2  $\mathbf{G}(s)$  – МПФ объекта управления СМПИМ;  $\mathbf{K}(s)$  – робастный регулятор;  $\mathbf{P}(s)$  – МПФ обобщенного объекта с учетом весовых функций;  $\mathbf{W}_S(s)$ ,  $\mathbf{W}_R(s)$  и  $\mathbf{W}_T(s)$  – весовые функции.

Стандартный объект  $\mathbf{G}$  задается в виде

$$\mathbf{G}(s) = \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & 0 \end{array}, \quad (1)$$

система описывается следующей системой уравнений в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (2)$$

Полагаем, что объект в данной постановке обладает следующими свойствами:

- а) пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$  – стабилизируемая, пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_1)$  – детектируемая;
- б) пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  – стабилизируемая, пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$  – детектируемая;
- в)  $\mathbf{D}_{12}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ;  $\Gamma \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ .

Матричная передаточная функция обобщенного объекта:

$$\mathbf{P}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{W}_S & -\mathbf{W}_S\mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{W}_R \\ 0 & \mathbf{W}_T\mathbf{G} \\ \hline \mathbf{I} & -\mathbf{G} \end{array} \right]. \quad (3)$$

Замкнутая МПФ от возмущения  $\mathbf{w}(t)$  к контролируемой переменной  $\mathbf{z}(t)$  в соответствии с ЛДП (LFT) [4]  $\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{F}_L(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}$  (см. рис. 2). Следовательно, задачей  $H_2$ -оптимизации является выбор такого регулятора  $\mathbf{K}_2$ , который бы минимизировал  $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$  ( $H_2$ -норму), а задачей  $H_\infty$ -оптимизации является выбор такого регулятора  $\mathbf{K}_\infty$ , который бы минимизировал  $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$  ( $H_\infty$ -норму). Причем выбор оптимального регулятора  $\mathbf{K}$  осуществляется над множеством всех регуляторов, обладающих свойством делать замкнутую систему  $\mathbf{T}_{zw}$  внутренне устойчивой, т.е. над множеством стабилизирующих регуляторов.

Замкнутая МПФ при решении задачи смешанной чувствительности:

$$\mathbf{T}_{zw} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_S(s)\mathbf{S}(s) \\ \mathbf{W}_R(s)\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_S(s)\mathbf{S}(s) \\ (\mathbf{W}_R(s)/\mathbf{G}(s))\mathbf{T}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$  - функция чувствительности;

$\mathbf{T}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$  - дополнительная функция чувствительности;

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{K}(s)(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1} \quad [5].$$

При синтезе  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторов скорости синхронного электропривода использовались следующие частотно-зависимые весовые функции [6]:

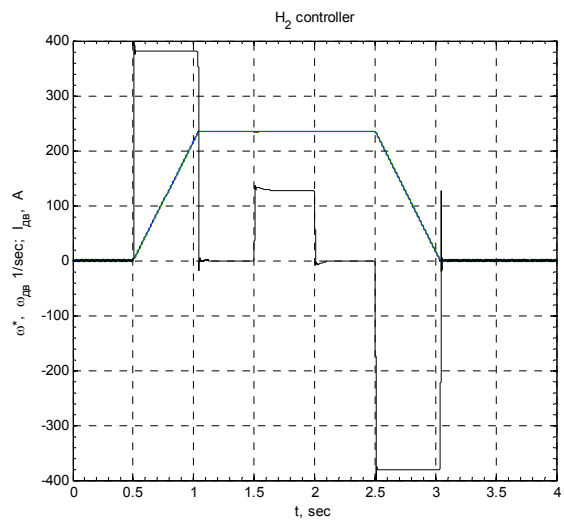
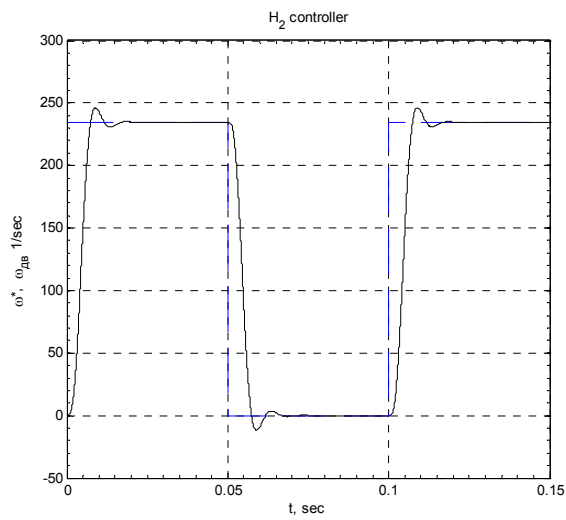
$$\mathbf{W}_S = \frac{s / M + \omega_0}{s + \omega_0 A}; \quad \mathbf{W}_R = const; \quad \mathbf{W}_T = \frac{s + \omega_0 / M}{As + \omega_0}, \quad (5)$$

где  $A = 0,001$  – желаемая максимально допустимая установившаяся ошибка в установившемся режиме;  $\omega_0 = 100$  – полоса пропускания;  $M = 1,5$  – пик чувствительности.

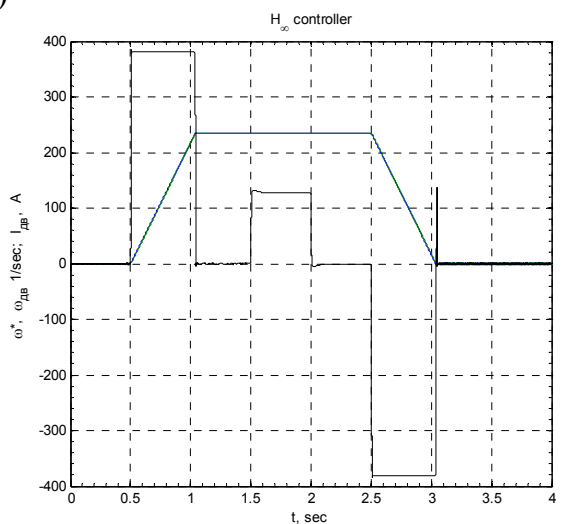
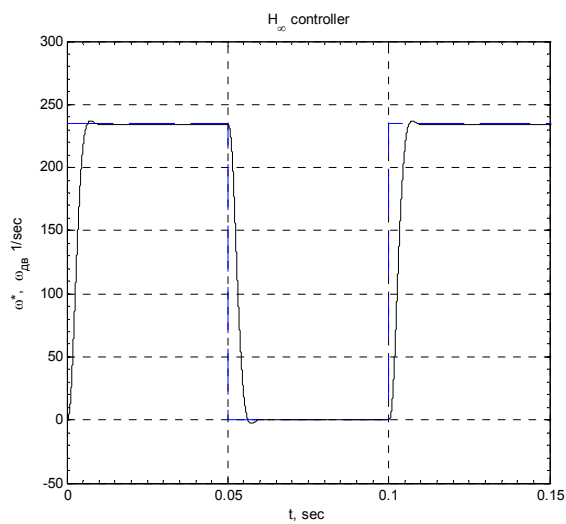
Отметим, что при целенаправленной вариации параметров весовых функций  $A$ ,  $\omega_0$  и  $M$  можно достичь требуемых характеристик качества системы управления, что показано в [6].

Детализированный синтез, алгоритмы  $H_2$ ,  $H_\infty$ -регуляторов,  $\mu$ -анализ и синтез методом D-K итераций робастных систем управления электропривода опубликованы авторами в [3-6]. Робастные регуляторы скорости были синтезированы с помощью алгоритмов в пакете расширения Robust Control Toolbox в системе MATLAB. Также необходимо отметить, что полученные  $H_2$  и  $H_\infty$  регуляторы скорости являются регуляторами 4 порядка, а  $\mu$ -регулятор - 26 порядка, который был редуцирован с помощью эффективных методов реализованных в пакете расширения Robust Control Toolbox  $\rightarrow$  H-infinity and Mu Synthesis в системе MATLAB до 4 порядка.

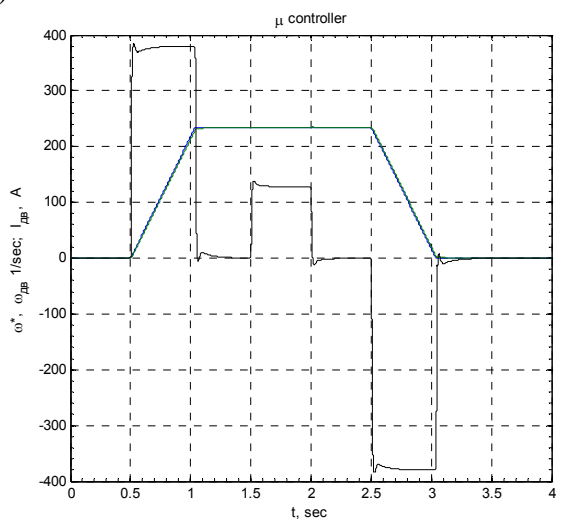
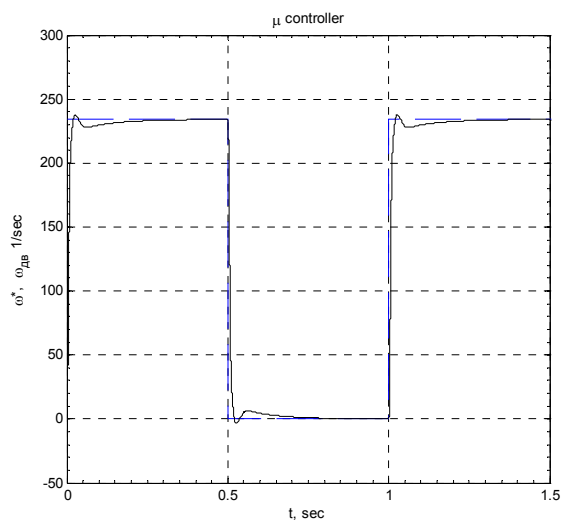
На рис. 3 представлены результаты работы синхронного электропривода с синтезированными  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторами скорости для различных видов задающего воздействия (реакция на скачки управления и обработка замкнутой САР заданной траектории), а на рис. 5 результаты моделирования с вариацией параметров ОУ (одновременное изменение момента инерции  $J$ , приведенного к валу электродвигателя и сопротивления обмотки статора  $R_s$  в 2 раза от номинальных значений как в сторону увеличения, так и уменьшения) при моменте сопротивления  $0,5 \cdot M_{н.дв}$ . При дальнейшем изменении этих же параметров в 4 и более раза САР с  $H_2$  регулятором теряет устойчивость, в то время как САР с  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторами обеспечивают заданную точность стабилизации скорости и низкую чувствительность к параметрическим и координатным возмущениям, действующих ОУ.



a)

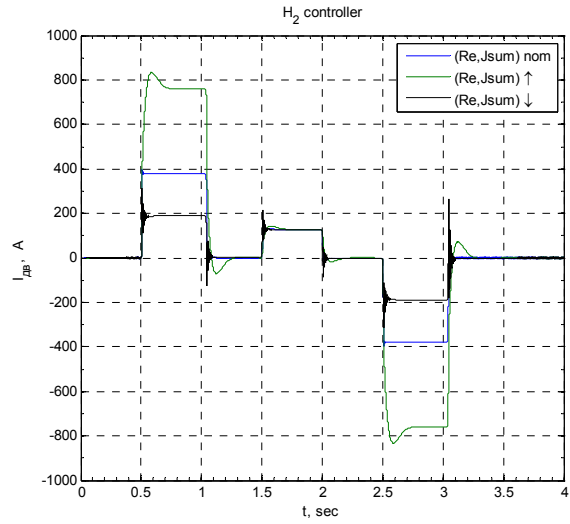
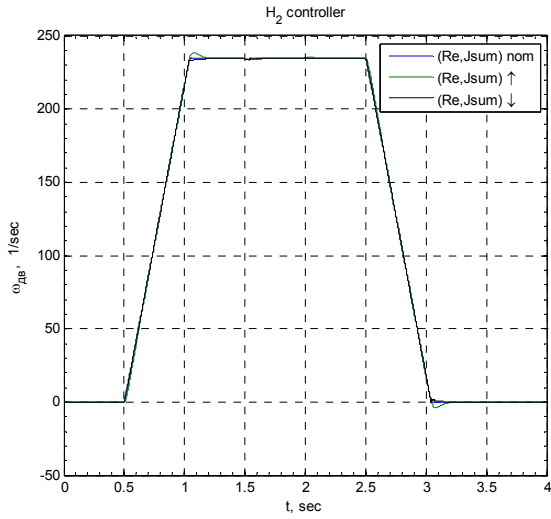


б)

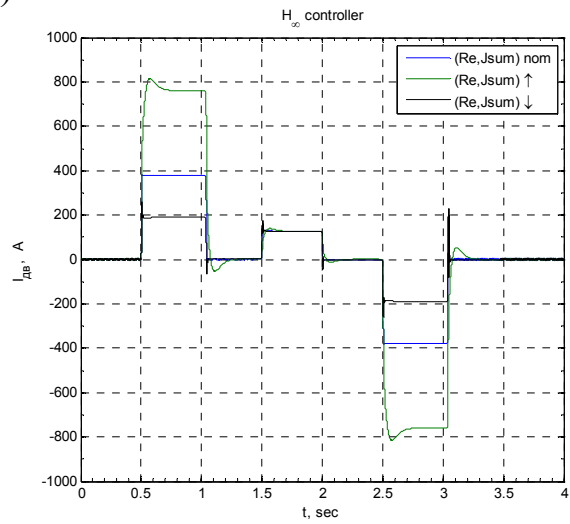
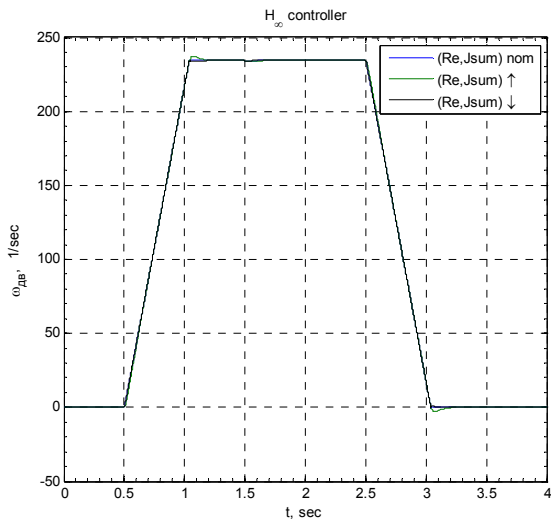


в)

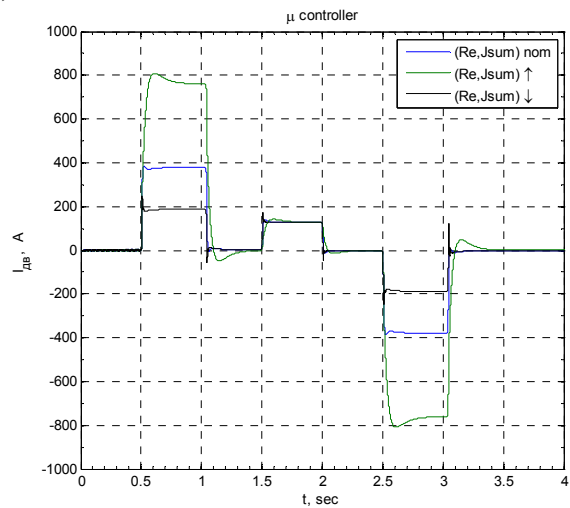
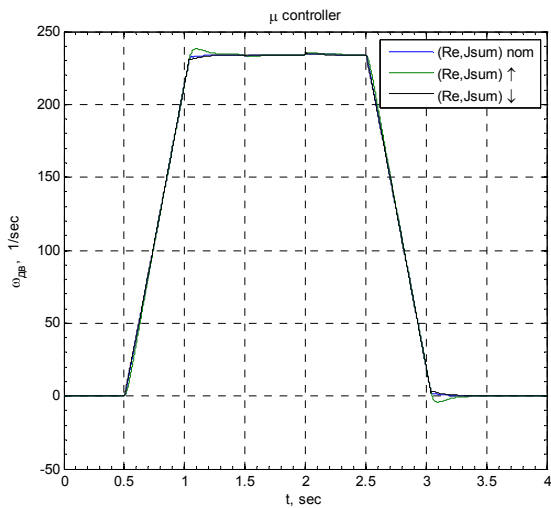
Рисунок 3 – Реакция замкнутой системы электропривода на скачки управления и отработка САР заданной траектории  $M_c = 0,5 \cdot M_{н дв}$   
 а) с  $H_2$ -регулятором; б) с  $H_\infty$ -регулятором; в) с  $\mu$ -регулятором



а)



б)



в)

Рисунок 4 – Отработка САР заданной траектории при одновременном изменении  $J$  и  $R$  в 2 раза от номинальных параметров ( $M_c = 0,5 \cdot M_{н.дв}$ )  
а) с  $H_2$ -регулятором; б) с  $H_\infty$ -регулятором; в) с  $\mu$ -регулятором

**Выводы.** Проведенный сравнительный анализ  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторов робастных систем управления синхронного электропривода показал, что все синтезированные регуляторы обеспечивают системе управления робастные характеристики качества и заданную точность поддержания скорости. Были разработаны программные коды (м-файлы) в системе Matlab, позволяющие синтезировать робастные САР,  $H_2$ ,  $H_\infty$  и  $\mu$ -регуляторы для электромеханического объекта  $n$ -го порядка.

### **Библиографический список**

1. Zames G. *Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* // *IEEE Trans. Automat. Control.* – 1981. – Vol.26. - No.2. – P.301-320.

2. Doyle J.C. *State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems* / J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis // *IEEE Trans. Automat. Control.* – 1989. – Vol.34. - No8. – P. 831-847.

3. Полилов Е.В. *Разработка и практическая реализация робастных алгоритмов управления автоматизированным синхронным электроприводом на основе  $H_2$ - и  $H_\infty$ -оптимизации* / Е.В. Полилов, А.И. Мотченко, Е.С. Руднев, С.П. Скорик, А.Г. Щелоков // *Журнал «Электротехнические и компьютерные системы».* – Киев: «Техника», 2011. – № 3 (79). – С. 60-69.

4. Полилов Е.В. *Синтез робастного  $H_\infty$ -субоптимального регулятора положения позиционного электропривода* / Е.В. Полилов, А.Б. Зеленев, Е.С. Руднев // *Вісник Кременчуцького державного технічного університету ім. Михайла Остроградського.* – Кременчук: КДПУ, 2008. – Вип. 3/2008 (50), частина 1. – С. 64-71.

5. Полилов Е.В.  *$\mu$ -анализ и синтез робастной системы управления электропривода постоянного тока* / Е.В. Полилов, А.Б. Зеленев, Е.С. Руднев // *Вісник Кременчуцького державного технічного університету ім. Михайла Остроградського.* – Кременчук: КДПУ, 2008. – Вип. 3/2009 (56), частина 2. – С. 25-30.

6. Полилов Е.В. *Практический подход к выбору весовых функций для  $H_\infty$ -теории робастного управления* / Е.В. Полилов, А.Б. Зеленев, Е.С. Руднев // *Вісник Кременчуцького державного технічного університету ім. Михайла Остроградського.* – Кременчук: КДПУ, 2008. – Вип. 3/2009 (56), частина 2. – С.17-24.

*Рекомендована к печати д.т.н., проф. Луциком В.Д.*