

д.т.н. Литвинский Г.Г.,
асп. Бикяшева Ю.Н.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ОБРАЗЦА ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСКОЛ

З метою підвищення точності і надійності визначення міцності гірських порід на одноосний розтяг вивчені особливості руйнування порід розколом за допомогою метода кінцевих елементів. Досліджено розподіл напружень в зразках прямокутної форми в постановці задачі Герца про стискання циліндра. Вперше встановлено діапазон застосування методу розколу.

Ключові слова: задача Герца, міцність на розтяг, метод розколу, прямокутний зразок, розподіл напружень, область застосування.

С целью повышения точности и надежности определения прочности горных пород на одноосное растяжение изучены особенности разрушения пород расколом методом конечных элементов. Исследовано распределение напряжений в образцах прямоугольной формы в постановке задачи Герца о сжатии цилиндра. Впервые установлен диапазон применения метода раскола.

Ключевые слова: задача Герца, прочность на растяжение, метод раскола, прямоугольный образец, распределение напряжений, область применения.

При проектировании и выполнении строительных и горных работ постоянно необходимы данные о физико-механических свойствах горных пород и каменных материалов. Это требует проведения обширных испытаний пород по определению их прочности, в первую очередь на одноосное сжатие и растяжение.

Одним из наиболее распространённых методов определения предела прочности каменных материалов на растяжение является испытание его на раскол путем сжатия образцов встречно направленными силами. Этот метод был предложен почти одновременно в 1953 г. в Японии Аказава (Akazava) и в Бразилии двумя инженерами Карнейро (Carneiro) и Барцеллос (Barcellos). Метод основан на использовании результатов теоретического решения Г. Герца краевой задачи теории упругости о напряженном состоянии цилиндра, нагруженного по диаметру двумя сосредоточенными силами. Расчётная схема задачи Герца показана на рис. 1.

Из решения этой задачи следует, что вдоль вертикального диаметра ядра действуют равномерно распределённые растягивающие напряжения (со знаком плюс).

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi R} = const, \quad (1)$$

где P – распределённая нагрузка вдоль образующей цилиндрического образца круглой формы, Н/м;

R – радиус образца, м.

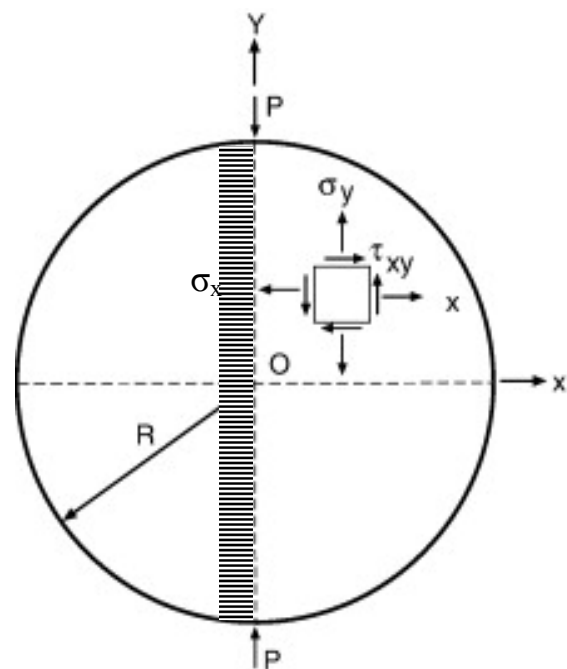


Рисунок 1 – Задача Г. Герца о нагружении диска сосредоточенными силами P

Такое равномерное распределение растягивающих напряжений по всему диаметру образца даёт уникальную возможность испытывать каменные материалы на одноосное растяжение, прикладывая сжимающую нагрузку, что достаточно просто осуществить в лабораторных и полевых условиях. Этот метод испытаний привлекает постоянное внимание многих исследователей [1-7], трудами которых было установлено много важных закономерностей, позволяющих упростить метод и уточнить результаты испытания расколом. Однако ряд выводов в таких работах не всегда совпадали. Так, в одной из первых работ [1] исследовалось разрушение расколом в «бразильском» методе на основе критерия Гриффитса в зависимости от соотношения между прочностью на одноосное сжатие и растяжение, и показано его существенное влияние на результаты испытаний.

В ряде исследований, например, в [2,3] установлено, что разрушение образцов либо начиналось сразу под загрузочными плитами пресса, либо сопровождалось сдвигами и поэтому результаты нельзя было однозначно трактовать как прочность на растяжение (рис. 2).

В работе [4] рассмотрены особенности испытаний пород расколом на образцах разной, в том числе и произвольной формы, однако не было исследовано, как влияют отклонения формы образца от круговой на результаты испытаний. Это при-

водило к неопределённости при оценке достоверности испытаний. В более ранних исследованиях [5] для анализа механизма разрушения от растягивающих напряжений в Бразильском методе привлекался аппарат механики разрушения с целью получения не только прочности на растяжение, но и показателей вязкости разрушения различных пород.

В последнее время интерес исследователей к данному методу испытаний пород не ослабевает, при этом широко используются численные методы изучения закономерностей испытаний. Так, методом граничных элементов [6] моделировалось возникновение микротрещин в образце с учётом влияния даже незначительных вариаций трения под нагружающими плитами пресса. При этом сделаны выводы, что возникновение трещин обусловлено внезапным случайным увеличением деформации перпендикулярно вертикальному диаметру образца. С учётом эффектов трения и для повышения достоверности испытаний были предложены и исследованы на численных моделях новые методы раскола, в частности, раскол образца ударной нагрузкой [7].

Метод испытаний пород на растяжение расколом стал настолько удобным, что его стали использовать с целью уменьшения трудоёмкости и обеспечения массовости испытаний не только для образцов цилиндрической формы, но и при иных формах сечения, вплоть до произвольной конфигурации.

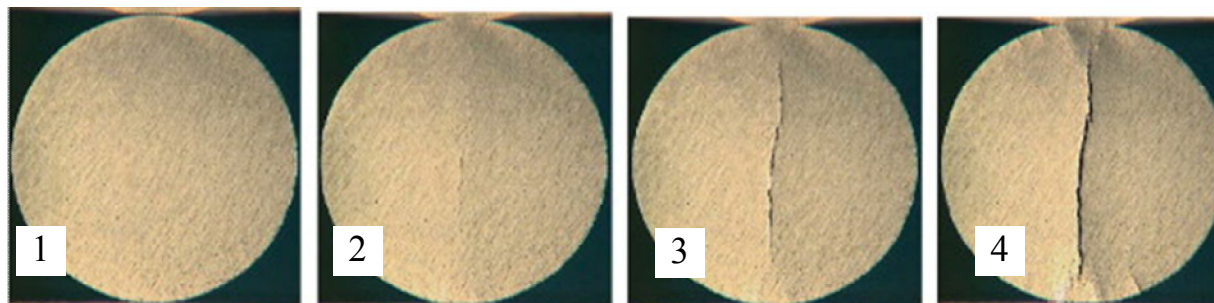


Рисунок 2 – Развитие трещин при испытании расколом:

1 – исходное упругое состояние образца; 2 – начало трещины в центре образца,
3 – максимум нагрузки, 4 – конец испытаний, снижение нагрузки [2]

Однако до настоящего времени не изучено, как влияет изменение формы испытуемого образца на результаты испытаний, какие допустимы отклонения формы образца от исходной круговой. Значимость подобных исследований состоит в том, что они могут помочь снять жёсткие ограничения на форму образца и тем самым значительно упростить и ускорить испытания.

Целью исследований являлось изучение влияния формы образца на прочность их при расколе. **Объект** исследования – образцы горных пород прямоугольной формы с различным соотношением сторон. **Предмет исследования** – напряжённо-деформированное состояние (НДС) образцов при их расколе.

Основная идея исследования заключается в определении отклонения главных напряжений в образцах различной формы от теоретического НДС в идеальном случае (испытания согласно задаче Герца) с помощью метода конечных элементов (МКЭ). На первом этапе изучения рассматривались образцы прямоугольной формы при изменении соотношения их сторон.

Метод конечных элементов основан на идее аппроксимации непрерывной функции напряжений дискретной моделью, состоящей из конечных элементов, на которых эта функция принимает дискретные значения. Поскольку исследуемая геометрическая область выбрана в форме прямоугольника, по центру которого приложены сосредоточенные силы, осуществляющие внешнее нагружение, то разбиение этой области на конечные элементы осуществить особенно просто. При этом можно воспользоваться тем, что расчётная схема и отражающая её модель имеют две взаимно перпендикулярных плоскости симметрии. Следовательно, можно строить модель для определения напряжений не во всём образце (круговой или прямоугольной формы), а в одной четвертой его части. Тем самым количество конечных элементов в образце сокращается в четыре раза, что ускоряет работу ЭВМ и упрощает

анализ полученных результатов. Для исследований можно использовать любой из существующих пакетов прикладных программ МКЭ ABAQUS, ANSYS, COMSOL Multiphysics, Femap и др. Нами был применён многофункциональный программный комплекс, предназначенный для проектирования и расчета машиностроительных и строительных конструкций различного назначения ПК Лира. Он позволяет рассчитывать конструкции любой сложности на различные виды статических и динамических воздействий и достаточно удобен для обработки результатов расчётов.

Расчётная схема задачи представлена на рис. 3. Внешняя нагрузка в виде сосредоточенной силы $P = 100$ Н приложена вдоль вертикальной оси симметрии образца $x = 0$, следовательно, к половине образца следует приложить половину нагрузки, т.е. $P/2 = 50$ Н. Граничные условия в модели также очевидны: по вертикальной оси симметрии при $x = 0$ горизонтальные смещения следует принять равными $E_{xx} = 0$, а по горизонтальной границе модели, проходящей также по оси симметрии $z = 0$ вертикальные смещения отсутствуют: $E_{zz} = 0$ (система обозначений напряжений и деформаций взята из ПК Лира). Для выполнения этих граничных условий в каждом узле модели предусмотрены соответствующие связи. На остальной поверхности модели ограничения на деформации отсутствуют.

За исходную форму образца, подвергаемого расколу вертикальными силами, принят круг радиуса $R = 0,5$ м (рис. 3, а). Горизонтальный a и вертикальный b размеры четверти прямоугольного образца (рис. 3, б) приняты переменными, а их соотношение менялось в пределах $a/b = 0,5 \dots 5$.

Каждый образец был разбит на 2002 изопараметрических универсальных плоских квадратных элемента, размеры которых составляли $0,01 \times 0,01$ м. Параметры материала образца при численной реализации модели были приняты следующие:

модуль Юнга $E = 13400$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, объемный вес $\gamma = 0,025$ МН/м³. Попутно отметим, что эти параметры лишь конкретизируют расчётную схему, но совершенно не влияют на напряжённо-деформированное состояние модели, если перейти к относительным величинам размеров и напряжений.

Для анализа влияния формы прямоугольного образца его вертикальный размер был фиксированным $b = 0,5$ м, а горизонтальный изменяли $a = 0,25, 0,50, 1,0, 2,50$ и $5,0$ м, т.е. соотношение высоты к ширине задавалось с помощью коэффициента формы $\xi = b / a = 0,5, 1, 2; 5, 10$. Количество элементов в образце по мере изменения коэффициента формы ξ изменялось соответственно от 1250 до 25000 шт. (рис. 3, б).

В результате выполнения расчетов было найдено НДС образцов в виде распределения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. При этом априори ясно, что вдоль осей симметрии образца расположены главные площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют $\tau_{xy} = 0$ и действуют только главные нормальные напряжения σ_x, σ_y . За эталонное значение напряжений приняты напряжения, возникающие в круговом образце. Поскольку при расколе разрушение образцов происходит от растягивающих напряжений σ_x вдоль оси z , т.е. при $x = 0$, а осо-

бенности распределения остальных напряжений σ_y, τ_{xy} малосущественны, главное внимание уделялось анализу распределения растягивающих напряжений σ_x .

Все полученные результаты по изучению особенностей распределения растягивающих напряжений σ_x удобно представить в виде относительной функции ошибки, которая вычислялась по формуле:

$$\Delta\sigma_x = \left(\frac{\sigma_x^n}{\sigma_x^t} - 1 \right) \cdot 100\%, \quad (2)$$

где σ_x^n / σ_x^t – соотношение напряжений в образце соответственно прямоугольной и круглой (теоретической) формы.

При $\Delta\sigma_x < 0$ напряжения в образце заданной формы меньше теоретических, принимаемых по решению Г. Герца, при $\Delta\sigma_x > 0$ – наоборот.

Проведенное численное моделирование напряжённо-деформированного состояния показало, что оно существенно зависит от соотношения сторон прямоугольного образца ξ (рис. 3). Как и следовало ожидать, напряжения наименее отличаются от теоретических в квадратном образце, т.е. когда $\xi = 1$. Из графиков на рис. 4 видно, что напряжение σ_x в центре образцов меняется незначительно по мере изменения формы образца.

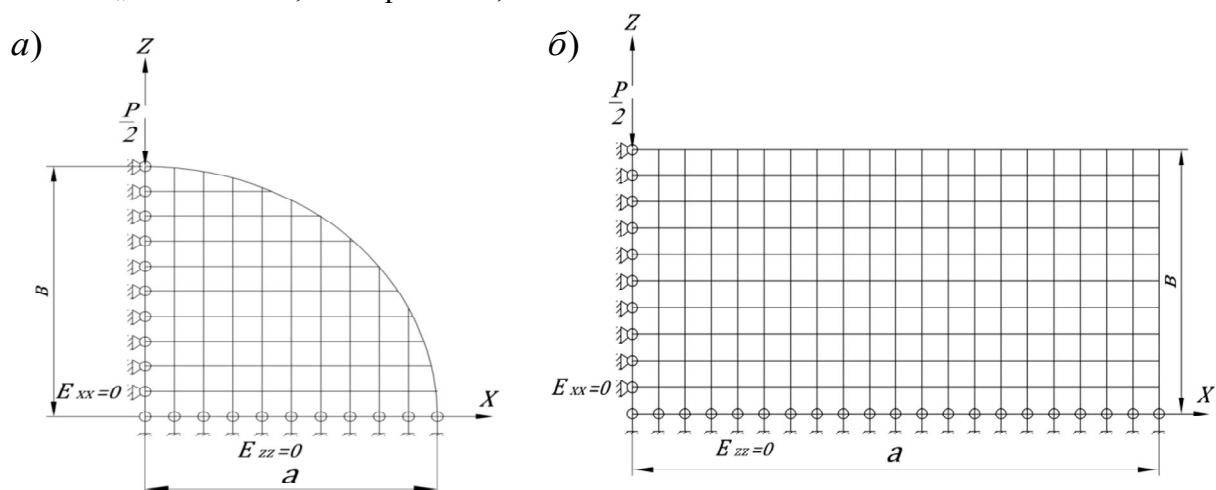


Рисунок 3 – Схема нагружения в задаче Герца о сжатии кругового диска (а) и расчётная схема для прямоугольных образцов (б)

Если проследить за этим изменением вдоль оси z , где напряжения $\sigma_x > 0$, т.е. растягивающие, то оказывается, что отклонения растягивающих напряжений $\Delta\sigma_x$ от теоретического значения не превышают 20% в центре образца и, независимо от его формы, уменьшаются по мере удаления от центра. Исключением являются образцы удлиненной вдоль вертикальной оси z формы ($\xi < 1$), у которых отклонения становятся недопустимо большими ($\Delta\sigma_x = -60 \dots 40\%$).

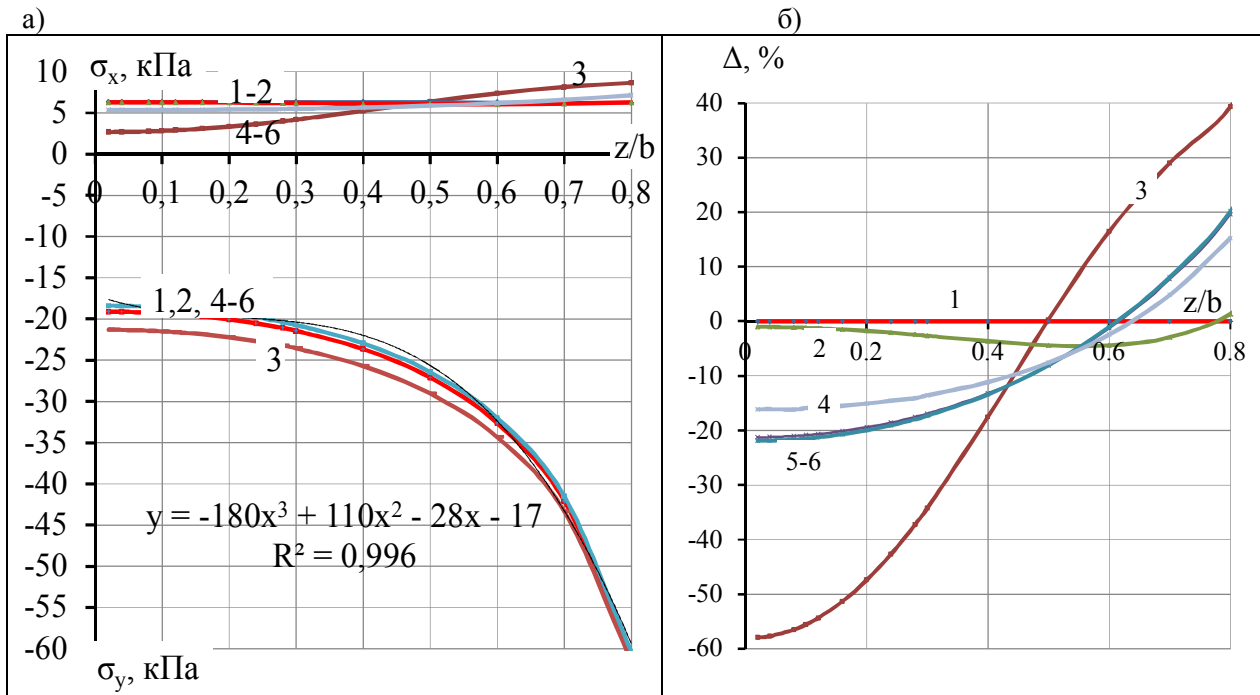
По мере удаления от центра вдоль вертикальной оси z растягивающее напряжение σ_x (со знаком $+$) уменьшается и переходит через нуль, далее меняет свой знак и вблизи контура под точкой приложения внешней нагрузки резко возрастает. При $\xi < 0,5$, когда образец имеет вытянутую вверх форму, возникают значительные отклонения напряжений (60% и более). Минимальное отклонение напряжений возникает при отношении $\xi = 1,0$, т.е. когда

образец в сечении имеет форму квадрата. При $\xi > 1$, отклонения напряжений от теоретических незначительны (менее 20%). Поэтому выполненные исследования доказывают возможность производить с достаточной точностью испытания на раскол не только образцов круглой формы, но и прямоугольного сечения с одним существенным ограничением: образцы не должны иметь коэффициент формы меньше 1, т.е. необходимо соблюдать условие $\xi > 1$.

Чтобы учесть эти закономерности при проведении испытаний на раскол удлиненных вдоль оси x образцов, когда $\xi > 1$, следует при обработке полученных результатов внести поправку, учитывающую это уменьшение растягивающих напряжений, в виде поправочной функции.

$$\sigma_x = f(\xi) \frac{P}{\pi R}, \quad (3)$$

где $\xi = a/b$ – отношение ширины образца к его высоте.



1 – круг; 2-6 – прямоугольные образцы с ξ : 2 – 1,0; 3 – 0,5; 4 – 1,5; 5 – 2,0; 6 – 5,0;

Рисунок 4 – Изменение а) растягивающих напряжений $\sigma_x (>0)$ и $\sigma_y (<0)$ вдоль вертикальной оси z в образцах различной формы в плосконапряженном состоянии; б) отклонения $\Delta\sigma_x$ растягивающих напряжений σ_x относительно теоретических σ_x^T в круговом образце

Поправочная функция $f(\xi) = f(a/b)$ была определена путём обработки данных, полученных для образцов разной формы в зависимости от возможного диапазона изменения их размеров $\xi = a/b \geq 1$ и имеет вид:

$$f(\xi) = f(a/b) = 1.3 - \exp(-1.1 \cdot \xi). \quad (4)$$

Тогда исправленная формула задачи Герца (1) будет иметь вид:

$$\sigma_x = f(\xi) \frac{P}{\pi R} = [1.3 - \exp(-1.1 \cdot \xi)] \frac{P}{\pi R}. \quad (5)$$

В таблице 1 показаны значения данной функции и дано ее сравнение с численными результатами для нормальных растягивающих напряжений σ_x в центре образца $x = 0; z = 0$.

Из сравнения данных численного расчёта и поправочной функции $f(\xi)$ видно, что ошибка аппроксимации находится в пределах 0...3%, что можно считать вполне удовлетворительной точностью.

Интересно проследить за тем, как меняются главные нормальные напряжения вдоль горизонтальной оси образца, которая выражена в относительном нормированном виде как $0 \leq x/b \leq 1$ (рисунок 5).

Графики рис. 5а показывают законы распределения напряжений σ_x в прямоугольных образцах разной формы. Сразу заметим, что нет почти никакой разницы в распределении горизонтальных σ_x и вертикальных σ_y напряжений для круглого

(принятого за эталон) и квадратного образцов, у которых коэффициент формы равен $\xi = 1$. В центре, как и следует из теоретического решения, $\sigma_x = 6,33$ кПа. Вдоль горизонтальной оси они снижаются до нуля, сохраняя положительный знак, т.е. оставаясь растягивающими для σ_x и сжимающими для σ_y . По мере изменения ширины образца отличия в напряжениях возрастают. Наибольшие отличия наблюдаются при $\xi = 0,5$, т.е. вытянутого вверх образца (под цифрой 3 на графике).

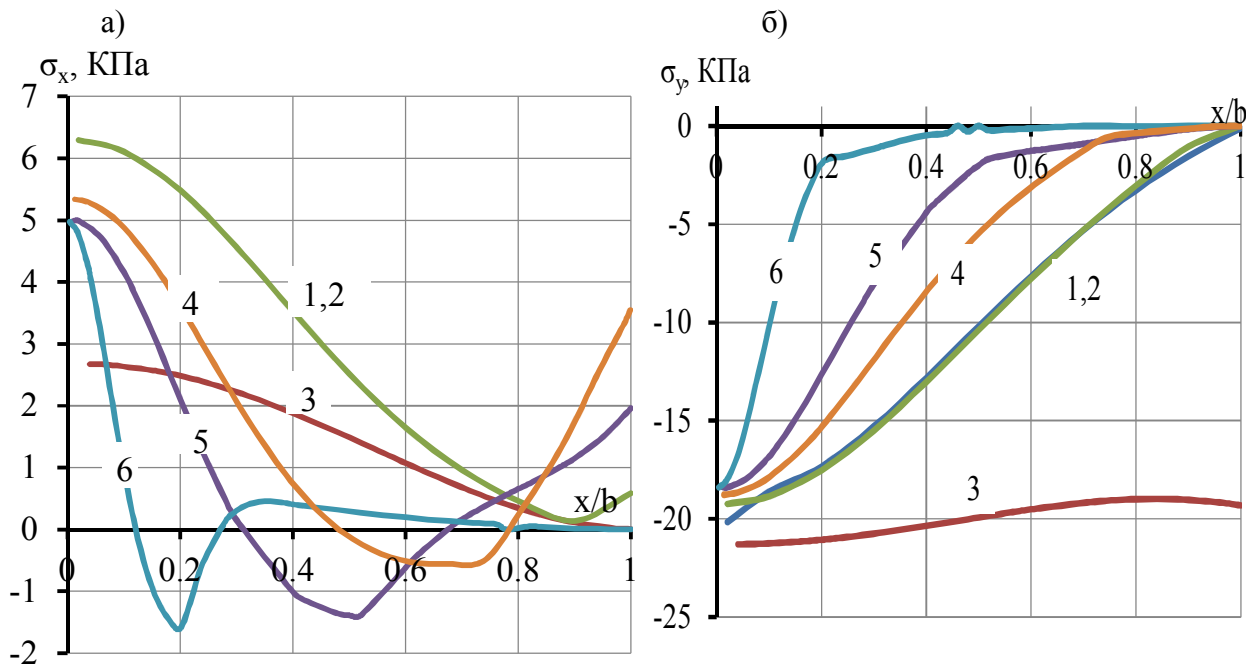
Отметим важную особенность распределения напряжений: в центре образца, где при расколе начинает возникать первичная трещина разрыва, напряжения σ_x и σ_y для всех форм образца различаются незначительно (кроме случая 3, у которого $\xi = 0,5$, т.е. вытянутого вверх образца). Следовательно, соотношение главных напряжений σ_x и σ_y в центре образца ($x=y=0$) находится в достаточно стабильных пределах:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \approx -\frac{6,33}{18}(1 \pm \Delta) = -0,3(1 \pm 0,1), \quad (6)$$

где $\Delta = \pm 0,1$ – средний коэффициент вариации соотношения σ_x/σ_y , показывающий относительную точность определения результата.

Таблица 1 – Оценка точности функции формы $f(a/b)$ для формулы Герца

$\xi = a/b$	1	1,5	2	3	4	5
σ_x / σ_x^T	1,0	1,2	1,24	1,26	1,28	1,3
$f(\xi)$	0,97	1,19	1,26	1,28	1,29	1,3
Ошибка, %	3	1	2	2	1	0



1 – круг; 2-6 – прямоугольники с ξ : 2 – 1,0; 3 – 0,5; 4 – 1,5; 5 – 2,0; 6 – 5,0;

Рисунок 5 – Изменение главных напряжений σ_x (а) и σ_y (б) вдоль оси x/b в образцах различной формы при плосконапряженном состоянии

Это соотношение в центре образца играет определяющую роль при испытаниях на раскол, что ранее выпадало из поля зрения исследователей. Поскольку в центре образца реализуется плосконапряженное состояние, то разрушение там может происходить по двум механизмам в зависимости от механических свойств материала:

1) при $[\sigma_t]/[\sigma_c] < 0,3$ – расколом от бегущей трещины растяжения;

2) при $[\sigma_t]/[\sigma_c] > 0,3$ – сдвиговыми трещинами от сжатия,

где $[\sigma_t]$ и $[\sigma_c]$ – прочность материала на одноосное растяжение и сжатие или, в терминах аналитической теории прочности [7], – $[\sigma_t]$ – когезия отрыва.

Очевидно, только первый случай, характерный для хрупких горных пород, обеспечивает надежные результаты при испытаниях на раскол и позволяет судить об истинных значениях прочности на растяжение. Если механические свойства материала удовлетворяют второму соотношению, что можно наблюдать у пород с пластичным поведением, когда угол внут-

реннего трения мал (меньше 20°), то проводить испытания на раскол не следует, поскольку результаты будут неверными: образец начнет разрушаться в центре образца не от растяжения, а от сжатия. Таким образом, можно впервые достаточно четко указать пределы оправданного применения этого популярного метода испытаний.

Исходя из вышеприведенных рассуждений, можно попытаться определить и требования к радиусу закругления рабочей поверхности индентора, через который создают внешнее нагружение. На этом участке образца следует избегать появления чрезмерно большого ядра раздавливания, если площадь контакта индентора с образцом будет недостаточна. Однако решение этой задачи отнесем к дальнейшим исследованиям.

Следует иметь в виду, что если метод раскола применяется для оценки прочности пород на растяжение вдоль контактных поверхностей ослаблений (слоистость, трещиноватость), т.е. когда наблюдается существенная прочностная анизотропия, то ограничения (7) уже не столь явно зави-

сят от угла внутреннего трения, а лишь от соотношения прочностей на контакте или плоскости ослабления.

Полученные результаты исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. При испытании пород на раскол можно использовать образцы с сечением прямоугольной формы, при этом наиболее близкие к задаче Герца результаты дают образцы квадратной формы, а для учета отклонения формы образцов от квадратной следует использовать формулу (5), при этом недопустимо использовать для испытаний узкие образцы с коэффициентом формы меньше 1, т.е. когда $\xi = a/b < 1$.

2. Метод поперечного раскола образцов инденторами будет оправданным, только

если у породы соотношение прочностей подчиняется неравенству $[\sigma_t]/[\sigma_c] < 0,3$, что характерно для хрупких пород с высоким (более 20°) коэффициентом угла внутреннего трения (песчаники, известняки, алевролиты, уголь и т.д.), а для пород с пластическими свойствами метод испытаний расколом непригоден.

3. Задачами дальнейших исследований следует считать определение ограничений, накладываемых требуемой точностью на контактные условия под индентором для раскола образцов, изучение кинематики роста трещины разрыва в образце и особенности раскола объемных образцов при сжатии между встречными инденторами.

Библиографический список

1. C. Fairhurst. *On the validity of the 'Brazilian' test for brittle materials.* – *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Volume 1, Issue 4, October 1964, pp. 535–546.*
2. J.A. Hudson, E.T. Brown, F. Rummel. *The controlled failure of rock discs and rings loaded in diametral compression.* – *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Volume 9, Issue 2, March 1972, pp. 241–244, IN1–IN4, 245–248.*
3. P. Jonsén, H.-Å. Häggblad, K. Sommer. *Tensile strength and fracture energy of pressed metal powder by diametral compression test.* – *Powder Technology, Volume 176, Issues 2–3, 20 July 2007, pp. 148–155.*
4. Литвинский Г.Г. *Экспресс-метод испытаний горных пород на ударно-статический раскол* / Г.Г. Литвинский, Буї Чу Шоат. – КГМИ: Коммунарск, 1997. - С. 125.
5. H. Guo, N.I. Aziz, L.C. Schmidt. *Rock fracture-toughness determination by the Brazilian test.* – *Engineering Geology, Volume 33, Issue 3, February 1993, Pages 177–188.*
6. Flavio Lanaro, Toshinori Sato, Ove Stephansson. *Microcrack modelling of Brazilian tensile tests with the boundary element method.* – *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Volume 46, Issue 3, April 2009, pp. 450–461.*
7. Alba Prosa, Pedro Díeza, Climent Molins. *Numerical modeling of the double punch test for plain concrete.* – *International Journal of Solids and Structures, Volume 48, Issues 7–8, April 2011, pp. 1229–1238.*
8. Литвинский Г.Г. *Аналитическая теория прочности горных пород и массивов: монография* / ДонГТУ. – Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 207 с.

Рекомендована к печати д.т.н., проф. Бабиюком Г.В.