УДК 519:378.046.4+048.2

Распопов В.Б.
Науково-навчальний центр прикладної інформатики
Національної академії наук України

ІНЖЕНЕРНИЙ ПІДХІД ДО ПРОЕКТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО БЛОКУ ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ ТЕХНОЛОГА

У статті розглядаються теоретичні аспекти використання методів математичного моделювання, оптимізації і планування експерименту для налаштування технологічних параметрів на виробництві. Стаття має на меті зацікавити майбутніх дослідників – юних програмістів МАН, академічно обдаровану студентську молодь, стажерів та аспірантів НДІ НАН України – задачами інженерного проектування, практикою реалізації і використання експертних систем.
Ключові слова: *моделювання, оптимізація, планування технологічного експерименту.*

Вступ. Налагодження технологічного процесу на виробництві часто буває ускладненим необхідністю експериментально налаштувати певні технологічні параметри так, щоб вони мали «оптимальні» значення. Такими параметрами можуть бути температура процесу, інтервал часу обробки, концентрація компонентів суміші тощо. Зазвичай цією експериментальною дослідницькою роботою на великому виробництві займається інженер-технолог або навіть кваліфікована група фахівців технологічної лабораторії, які застосовують певні математичні методи і комп'ютерні програми для оптимального планування технологічного експерименту. Причому чим тривалішим або чим дорожчим є випуск одиниці продукції, тим більше уваги приділяється науковому обґрунтуванню того, якими саме мають бути ті чи інші технологічні параметри виробничого процесу.

На невеликому підприємстві коштів на науково обґрунтований підбір технологічних параметрів зазвичай бракує. Власнику невеликого підприємства у подібних ситуаціях допоможе експертна система технолога. До її розроблення запрошуються аспіранти, студенти-дипломники і стажери Науково-навчального центру прикладної інформатики НАН України, які спеціалізуються з прикладної математики і програмування.

Необхідним складником кожної сучасної експертної системи (ЕС) є модуль математичного моделювання, за допомогою якого ЕС здійснює прогноз і надає конкретні рекомендації користувачу ЕС щодо вибору значень тих чи інших параметрів, які цікавлять фахівця.

Пояснимо сказане на простому прикладі. Власник міні-пекарні, яка виробляє кондитерські вироби, зацікавлений у тому, аби підібрати такий рецепт суміші для тіста, щоб пиріжки були смачнішими, ніж у конкурентів, і тому добре продавалися. Допомогу технологу може надати комп'ютерна експертна система: вона спрямує пошук оптимальної суміші для тіста і в діалоговому режимі порадить йому, як за мінімальну кількість експериментальних випічок тіста підібрати найкращу концентрацію цукру, жирів, дріжджів, молока, яєць тощо у кондитерській суміші.

Математична постановка задачі. Продовжимо розгляд прикладу. Формалізуємо задачу. Нехай якість випічки характеризується певною математичною функцією $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $\{x_i\}$, $1 \,''\, i \,''\, n$ – це концентрації інгредієнтів суміші для тіста. Значеннями y можуть слугувати або об'єктивні числові величини, наприклад, денна виручка з продажу, або певна суб'єктивна експертна оцінка кінцевої якості продукції, наприклад, «смачність випічки», оцінена групою експертів-дегустаторів. Математична задача полягає у тому, щоби, поступово змінюючи концентрації інгредієнтів (а також підбираючи технологічні параметри бродіння тіста, температурні параметри його випічки тощо), максимізувати значення функції якості $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Приклад 1. Для подальшого аналізу задачі та наочності пояснень припустимо, що функція якості (наприклад, смачність випічки) є однопараметричною, тобто $n = 1$, $x = x_1$, $y = f(x)$, і є опуклою, тобто поблизу екстремуму функцію $y = f(x)$ можна наблизити (апроксимувати, «замінити») параболою $y = Ax^2 + Bx + C$ [1; 2].

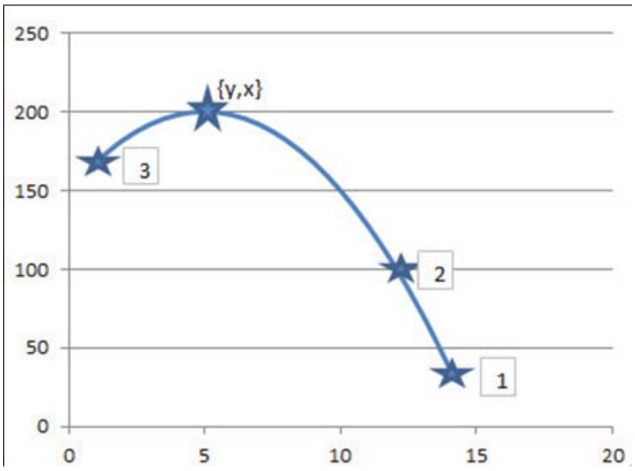

Рис. 1. Модель функції якості в околі екстремуму $y = f(x)$ – це парабола $y = Ax^2 + Bx + C$

Розв'язок задачі. Параметри цієї параболи – коефіцієнти A, B, C – є невідомими, але можуть бути обчислені за фіксації результатів трьох технологічних експериментів (y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3), тобто щоби встановити, якими є значення параметрів A, B, C, ми маємо знайти розв'язок такої системи трьох рівнянь, лінійних відносно коефіцієнтів A, B, C :

$$\begin{cases} y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C \\ y_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (x_1^2)A + (x_1)B + C = y_1 \\ (x_2^2)A + (x_2)B + C = y_2 \\ (x_3^2)A + (x_3)B + C = y_3 \end{cases}.$$

Використаємо метод Крамера, щоби знайти невідомі значення коефіцієнтів A, B, C :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_B = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta}; \; B = \frac{\Delta_B}{\Delta}; \; C = \frac{\Delta_C}{\Delta}.$$

Знайдені коефіцієнти A, B, C дають змогу обчислити (тобто «спрогнозувати») екстремальні значення параболи : (y_0, x_0) ,

$$x_0 = \frac{-B}{2A}, \; y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C.$$

Таким чином, практичні рекомендації для інженера-технолога або для власника виробництва, який довірятиме порадам цієї експертної системи технолога, такі: потрібно провести наступний технологічний експеримент при $x = x_0$, і якщо його результат $y_{експеримент}$ збігається (або майже збігається, в межах похибки) із прогнозованим значенням y_0 , то найкращий результат x_0 вже знайдено.

Мірою досягнення результату – тобто похибкою d – може слугувати така формула:

$d = |y_0 - y_{експеримент}|$.

Якщо похибка d, на думку інженера-технолога, ще є досить великою, експериментальний пошук екстремуму має бути продовжено. А саме, результати трьох останніх експериментів (y_2, x_2), (y_3, x_3), $(y_{експеримент}, x_0)$ варто перепозначити так: $x_1 = x_2, y_1 = y_2$; $x_2 = x_3, y_2 = y_3$; $x_3 = x_0, y_3 = y_{експеримент}$, щоб можна було заново обрахувати коефіцієнти A, B, C за наведеними вище математичними формулами, а потім ще раз «спрогнозувати» оновлені екстремальні значення параболи – точку з координатами (y_0, x_0) – і з новим значенням $x_0 = \frac{-B}{2A}$ провести наступний технологічний експеримент, щоб експериментально з'ясувати значення величини $y_{експеримент}$, і т. д.

Програмна реалізація методу. Метод, описаний вище, можна реалізувати програмно більшістю мов програмування. Наприклад, код програми для «хмарних обчислень», написаний мовою PHP, наведено в [1].

```
public function masive_generate()
        {
        $this->load->helper('url');
         $x1 = $this->input->post('x1'); $f1 = $this->input->post('f1');
         $x2 = $this->input->post('x2'); $f2 = $this->input->post('f2');
         $x3 = $this->input->post('x3'); $f3 = $this->input->post('f3');
      $masiv_matrix = array(
         array ( array ($x1 * $x1, $x1,1),
                  array ($x2 * $x2,$x2,1),
                  array ($x3 * $x3,$x3,1),),
         array ( array ($f1, $x1,1),
                 array ($f2,$x2,1),
                 array ($f3,$x3,1), ),
         array ( array ($x1 * $x1, $f1,1),
                  array ($x2 * $x2,$f2,1),
                  array ($x3 * $x3,$f3,1), ),
         array ( array ($x1 * $x1,$x1,$f1),
                  array ($x2 * $x2,$x2,$f2),
                 array ($x3 * $x3,$x3,$f3), )  );
      for($i = 0; $i <= 3; $i++)
      { $det[] =
 ($masiv_matrix[$i][0][0] * $masiv matrix[$i][1][1] *$masiv_matrix[$i][2][2]
+
   $masiv_matrix[$i][0][1] * $masiv_matrix[$i][1][2] *$masiv_matrix[$i][2][0]
+
   $masiv_matrix[$i][0][2] * $masiv_matrix[$i][1][0] *$masiv_matrix[$i][2][1]
-
   $masiv_matrix[$i][0][2] * $masiv_matrix[$i][1][1] *$masiv_matrix[$i][2][0]
-
   $masiv_matrix[$i][0][0] * $masiv_matrix[$i][1][2] *$masiv_matrix[$i][2][1]
-
   $masiv_matrix[$i][0][1] *
```

```
$masiv_matrix[$i][1][0]*$masiv_matrix[$i][2][2])}
      if ($det[0] != 0)
      {  $a = $det[1]/$det[0];
         $b = $det[2]/$det[0];
         $c = $det[3]/$det[0];
         echo "<p>
<img src='\img\a.png' style='vertical-align: middle'/>".$a."<br>
<img src='\img\b.png' style='vertical-align: middle'/>".$b."<br>
<img src='\img\c.png' style='vertical-align: middle'/>".$c."</p>";
         if ($a != 0){
           $x = ((-1)*($b))/(2*$a);
           $y = $a*($x*$x) + $b*$x + $c;

echo "<h3>Спрогнозовані значення наведені нижче</h3>";
echo "<img src='\img\x-change.png' style='vertical-align: middle'/>=". $x ;
echo "<img src='\img\y-change.png' style='vertical-align: middle'/>=".$y ;
         } else { echo "<h1> a = 0 Message: Division by zero</h1>"; }
         echo "<a href='http://experiment.ho.ua/'>Ввести нові
дані</a></div>";     }
else { echo "Determ is 0 <br><h1>Message: Division by zero</h1>"; } }
```

Зауваження. У тому разі, коли функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є двопараметричною, тобто $y = f(x_1, x_2)$, але між параметрами x_1 і x_2 існує певна математична залежність, наприклад $x_1 + x_2 = Q$, можна ввести позначення $t = \frac{x_1}{x_2}$, яке змістовно інтерпретується як частка або як процентне співвідношення між двома компонентами суміші. Тоді двопараметрична оптимізаційна задача спрощується: досліджуємо однопараметричну модель $y = f(t)$. Наприклад, експериментально встановлено, що максимізація виходу продукту бродіння розчину цукру в воді буде за $t = 0,25$.

Приклад 2. Пояснимо суть узагальнення методу на прикладі експериментального пошуку екстремуму двопараметричної функції $y = f(x_1, x_2)$, $n = 2$.

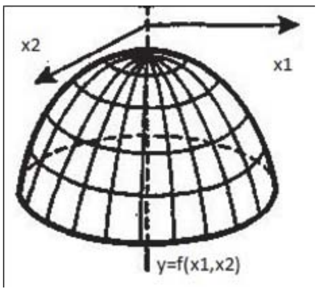

Рис. 1. Наближення функції якості в околі екстремуму параболоїдом

$$y = Ax_1^2 + Bx_1 + C + Dx_2^2 + Ex_2 + Fx_1x_2$$

$$y = Ax_1^2 + Bx_1 + C + Dx_2^2 + Ex_2 + Fx_1x_2$$

Числові параметри параболоїда – коефіцієнти A, B, C, D, E, F – є невідомими, але їх значення можуть бути обчислені, якщо відомі результати шести технологічних експериментів (y_1, x_{11}, x_{21}), (y_2, x_{12}, x_{22}), (y_3, x_{13}, x_{23}), (y_4, x_{14}, x_{24}), (y_5, x_{15}, x_{25}), (y_6, x_{16}, x_{26}), тут другий індекс j позначення x_{ij} вказує на номер експерименту.

Щоби встановити, якими є значення параметрів A, B, C, D, E, F, можна скористатися методами лінійної алгебри. Потрібно знайти розв'язок системи з шести лінійних рівнянь відносно шести невідомих коефіцієнтів A, B, C, D, E, F:

$$A({x_{11}}^2) + B(x_{11}) + C + D({x_{21}}^2) + E(x_{21}) + F(x_{11}x_{21}) = y_1$$
$$A({x_{12}}^2) + B(x_{12}) + C + D({x_{22}}^2) + E(x_{22}) + F(x_{12}x_{22}) = y_2$$
$$A({x_{13}}^2) + B(x_{13}) + C + D({x_{23}}^2) + E(x_{23}) + F(x_{13}x_{23}) = y_3$$
$$A({x_{14}}^2) + B(x_{14}) + C + D({x_{24}}^2) + E(x_{24}) + F(x_{14}x_{24}) = y_4$$
$$A({x_{15}}^2) + B(x_{15}) + C + D({x_{25}}^2) + E(x_{25}) + F(x_{15}x_{25}) = y_5$$
$$A({x_{16}}^2) + B(x_{16}) + C + D({x_{26}}^2) + E(x_{26}) + F(x_{16}x_{26}) = y_6$$

Після того, як значення A, B, C, D, E, F знайдені, скористаємося необхідними умовами екстремуму неперервної функції, щоб обчислити координати (y_0, x_{10}, x_{20}) точки екстремуму параболоїда $y = Ax_1^2 + Bx_1 + C + Dx_2^2 + Ex_2 + Fx_1x_2$, а саме

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$$

або

$$\begin{cases} 2Ax_1 + Fx_2 = -B \\ 2Dx_2 + Fx_1 = -E \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи, позначений (x_{10}, x_{20}), дасть нам змогу обчислити значення $y_0 = Ax_{10}^2 + Bx_{10} + C + Dx_{20}^2 + Ex_{20} + Fx_{10}x_{20}$.

Практичні рекомендації для інженера-технолога (або для власника виробництва, який довіряє порадам експертної системи технолога) аналогічні тим, які були описані вище в прикладі 1: потрібно провести ще один технологічний експеримент за $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, і якщо результат експерименту $y_{експеримент}$ збігається (або «майже збігається» в межах припустимої похибки) із прогнозованим значенням y_0, то найкращий результат $\{x_{10}, x_{20}\}$ знайдено.

Мірою досягнення результату – тобто похибкою d – може бути така формула:

$$d = \left| y_0 - y_{експеримент} \right|.$$

Якщо похибка d, на думку інженера-технолога, ще є досить великою, експериментальний пошук екстремуму має бути продовжено.

Зауваження щодо модифікацій методу. На відміну від попередніх рекомендаціїй (щодо допустимої межі відхилення d і перепозначення точок x_{ij}, які враховуватимуться на наступному кроці алгоритму побудови параболоїду, див. приклад 1), можна скористатися регресійним моделюванням, суть якого полягає в тому, щоб обчислювати нові значення параметрів A, B, C, D, E, F параболоїда на підставі всіх без винятку результатів попередніх експериментів, використовуючи для цього метод найменших квадратів (МНК). Можливі й інші підходи, які базуються на застосуванні критерію Чебишева або на евристиці. Наприклад, із числа всіх попередніх експериментів для подальших розрахунків залишимо тільки ті шість, які забезпечили найкращий прогноз значення y_0. Тобто під час програмної реалізації математичного блоку екпертної системи технолога програміст може спиратися і на евристику, розуміючи при цьому, що досліджувана математична модель функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у вигляді параболи або у вигляді параболоїду є лише певним математичним припущенням формалізованої задачі.

Узагальнення методу. Експериментальний пошук екстремуму багатопараметричної функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ для $n \geq 2$ вимагає проведення ще складніших обчислень. Розробнику ЕС також знадобляться певні теоретичні і практичні знання з чисельних методів оптимізації, про які не йдеться в цій статті. Математичні методи планування експерименту – це прикладна (тобто інженерна) навчальна дисципліна, яка базується на методах оптимізації і на статистичних методах оцінювання. Розроблені фахівцями математичні методи планування експерименту дають змогу науково обґрунтувати і практично спланувати в умовах неповної інформації експериментальний пошук екстремуму стохастичної функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n, \omega)$ для довільного значення $n \geq 2, \omega \subset \Omega$. На жаль, на практиці, наприклад, у спрямованому імітаційному моделюванні, не завжди можна скористатися формальними математичними методами планування експерименту через те, що значення функцій $y = f(x_1, x_2, ..., x_n, \omega)$ обчислюються дуже повільно або ж для отримання значень $y = f(x_1, x_2, ..., x_n, \omega)$ має бути виконаний дуже витратний або дуже тривалий новий експеримент [3].

Для студентів Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського, студентів і аспірантів Київського академічного університету, інших дослідницьких вишів викладене може слугувати вступом у дисципліну «Теорія планування експерименту», в якій систематично розглядається регресійний аналіз лінійних моделей спостережень повного і неповного рангів, питання перевірки гіпотези адекватності моделей, аналіз багатовимірних функцій відгуку, пасивний, повний і дробовий факторні експерименти, а також вивчаються лінійні плани, стохастичне оцінювання градієнта, пошук екстремуму функцій відгуку, всебічне дослідження околу екстремуму [5; 6]. Стажери і практиканти Науково-навчального центру прикладної інформатики НАН України, яких зацікавила окреслена науково-практична задача, запрошуються до участі у розробленні сучасної хмарної експертної системи технолога, яка знайде використання в бізнесі і на виробництві [4].

Висновки. Наведені в цій статті математична модель, приклади і методичні рекомендації щодо її застосування окреслюють суть теоретичних проблем, з якими на практиці має справу інженер-програміст, розробник ЕС. Приклади, наведені у статті, можуть бути використані під час розроблення сучасних навчальних курсів, навчальних посібників і підручників, орієнтованих на інженерів-програмістів.

Список літератури:

1. Распопов В.Б., Ситнік Д.І. Роль математичного моделювання в експертній системі технолога // Наука України. Перспективи та потенціал [Текст]: Матеріали IX Всеукраїнської науково-практичної заочної конференції «Наука України. Перспектива та потенціал» (м. Одеса, 21–22 лютого 2014 р.). – Одеса: 2014. – С. 31–33.
2. Розробка моделей та методів аналізу складних систем засобами комп'ютерної математики [Під ред. доцента В.Б. Распопова]: Науково-учбовий центр прикладної інформатики НАН України. – Київ: НУЦ ПІ НАНУ, 2016. – 122 с. – С.: 91–96. – [Електронний ресурс]: – https://en.calameo.com/read/003168372fc8fe652df02
3. Марьянович Т.П., Петросян С.А., Распопов В.Б. Диалоговый метод в направленном имитационном моделировании. – Ж-л «Кибернетика», № 3, 1978. – с. 58–61.
4. Распопов В.Б. Щоб вивчитись на науковця. – Ж-л «Вісник Національної Академії наук України», № 12, 2012. – С. 44–54. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://en.calameo.com/read/00316837263af93ba5649
5. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.
6. Сидняев Н.И., Вилисова Н.Т. Введение в теорию планирования эксперимента: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 463 с.

ИНЖЕНЕРНЫЙ ПОДХОД К ПРОЕКТИРОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БЛОКА ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ ТЕХНОЛОГА

В статье рассматриваются теоретические аспекты использования методов математического моделирования, оптимизации и планирования эксперимента для настройки технологических параметров на производстве. Статья имеет целью заинтересовать будущих исследователей – юных программистов МАН, академически одаренную студенческую молодежь, стажеров и аспирантов НИИ НАН Украины – задачами инженерного проектирования, практикой реализации и использования экспертных систем.

Ключевые слова: *моделирование, оптимизация, планирование технологического эксперимента.*

THE MATHEMATICAL ENGINEERING FOR THE APPLIED EXPERT SYSTEMS

The theoretical aspects of the use of methods of mathematical modeling, optimization and planning of the experiment for the adjustment of technological parameters in production are considered in the paper. The article aims to interest future researchers – young programmers of the Minor Academy of Sciences, academically gifted student youth, trainees and postgraduates from the Institutes of Sciences of the NAS of Ukraine, – tasks of engineering design, practice of implementation and use of expert systems.

Key words: *modeling, optimization, planning of technological experiment.*