УДК 519.21;530.162

Дубко В.О.
Обособленное подразделение Национального университета биоресурсов и природопользования Украины «Нежинский агротехнический институт»

МОДЕЛИ СОГЛАСОВАННОЙ ЭВОЛЮЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены особенности описания и моделирования локальных и глобальных показателей многоэлементных систем.

Ключевые слова: *системные переменные, коллективные переменные, надежность.*

Постановка проблемы. Каноническая теория надежности базируется на утверждении, что интерес представляют распределения состояний системы, а не конкретные ее случайные реализации. Как следствие, при оценках показателей систем используют среднестатистические показатели. Но ориентация только на осредненные характеристики при принятии решений, проектировании и эксплуатации технических, хозяйственных объектов заведомо допускает катастрофические последствия как для человека, так и для его среды обитания. Такой подход привел к представлению о допустимости процента катастроф, например, при транспортных перевозках.

Однако возрастание интенсивности воздействий на среду обитания человека в результате как хозяйственной деятельности, так и иных способов ее потребления неизбежно ведет к исчерпанию ее ресурсов, адаптационных возможностей.

Стали фактом постоянные локальные превышения норм предельно допустимых концентрации вредных веществ, особенно в крупных городах. Последнее объясняется и тем, что механизм переноса струй от промышленных предприятий, рассеивание выбросов, в отличие от молекулярной диффузии, осуществляется на большие расстояния крупными агрегатами. Визуально это выражается как меандрирование струи (случайное колебание по отношению к среднему направлению переноса от источника), ее разрывы, выпадение промышленной пыли «пятнами». Если же ориентироваться на осредненные характеристики по достаточно большим пространственно-временным масштабам, то загрязнения могут соответствовать нормам. Доказательством неприемлемости при проектировании систем допустимости процента катастроф могут служить и аварии на атомных станциях в Чернобыле и в префектуре Фукусима.

Понимание катастрофичности последствий не только антропогенных, но природных катаклизмов для жизни привело к необходимости более осторожного подхода при принятии решений по проведению каких-либо крупномасштабных преобразований (экспериментов) в окружающей среде, пересмотру концепции, расчета надежности, прогноза (планирование и принятие опережающих решений), риска.

Отметим, что при оценке надежности взаимозависимых систем надежность всей многоэлементной системы, даже при высокой надежности каждого из ее элементов, резко уменьшается, если для сбоя, прекращения работы системы достаточно разрушения одного или нескольких элементов. Примеры таких объектов, ситуаций можно найти в системах городского хозяйства (трубопроводы, канализационные системы и др.).

Эффективным методом, позволяющим предвидеть и снизить, а в некоторых случаях и исключить возможные катастрофические последствия, является моделирование. Сложность состоит в том, что природно-технические и социальные системы многокомпонентные, с большим числом связей между формирующими их элементами, имеют свою историю и соизмеримость потоков, которыми системы обмениваются с окружением (то есть являются открытыми динамическими системами – ОДС). Уже одно это не позволяет использовать при их описании строго детерминированные модели, требует перехода к стохастическим моделям. Особенно явно стохастические свойства поведения проявляются при переходе от исследования интегрального развития к изучению динамики выделенной подсистемы.

Математический аппарат, который предоставляет возможность перехода к моделированию случайных реализаций, формирует теория стохастических дифференциальных уравнений. Исследования в области теории стохастических дифференциальных уравнений показали, что существует возможность организации, самоорганизации открытых динамических систем, позволяющих с вероятностью 1 (достоверно) сохранить конкретные функциональные связи, жизненно важные показатели на любой траектории эволюции ОДС (Дубко, 1978; 1989). Эти уравнения могут быть взяты в качестве основы для поиска принципов функционирования, организации реальных, состоящих и из небольшого числа элементов, систем.

Плодотворным методом описания таких систем как целого становится использование макропараметров, коллективных переменных, отображающих изменения всей совокупности систем. Коллективные переменные характеризуют согласованное, когерентное поведение подсистем. В физике эти переменные получили специальные названия в зависимости от природы систем, при моделировании которых они используются (например, фононы – коллективное движение атомов и молекул).

Согласуется с представлением об эффективности использование макропеременных интегральных показателей системы с большим числом взаимодействующих элементов с целью повышения ее надежности на основе сильной обратной связи в режиме реального времени – принцип глобального управления.

С точки зрения задач организации жизнедеятельности человека, общества влияние геологоморфотектонических и геоморфологических структур можно рассматривать как влияние коллективных переменных. Это связано с тем, что они охватывают огромные пространственные территории, изменения в геологической среде происходят на значительных исторических промежутках по отношению к периодам жизненного цикла цивилизаций и слагающих биосферу элементов. Общая эволюция живых и социальных систем происходит и происходила на фоне этих глобальных изменений геологических структур, бесспорно, оказавших влияние на структуру, динамику и эволюцию развития биосферы и социума. Закономерности этих изменений должны учитываться и быть отправными при формировании целей, которые ставят перед собой человек и общество, при желании понять, осуществима ли эта цель в этих условиях и где грань, выход за которую не может произойти иначе, как катастрофически. Эти изменения должны учитываться при изучении и моделировании условий равновесия в биогеоценозах, принципов перехода из одного равновесного состояния в иное при изменении условий, что в период основательного вмешательства человека в биосферу становится жизненно важным.

При переходе к изучению и моделированию конкретных реальных, имеющих более локальную область сосредоточения систем подобные глобальные закономерности выступают как данные – системные законы, мгновенно определяющие коррелятивность в свойствах и динамике пространственно разнесенных систем, в которых процессы протекают более быстро, чем глобальные. Это позволяет рассматривать их как управляющие переменные.

На этапе моделирования динамики подсистем важным является использование обобщенного принципа Ланжевена. Основное утверждение последнего заключается в том, что динамику выделенной подсистемы можно представить как следствие суммы реакций на детерминированные и случайные воздействия, зависящих от макропеременных и вектора текущего состояния выделенной системы. Использование принципа Ланжевена оказалось плодотворным при построении моделей и объяснении свойств ОДС с привлечением достижений теории стохастических дифференциальных уравнений (Дубко, 1978; Скороход, 1977).

Цель работы – демонстрация появления макропеременной у многоэлементной системы на примере систем с билинейным взаимодействием при наличии возмущений (пуассоновских и винеровских).

Изложение основного материала. ***Пример построения уравнения для стохастической коллективной переменной.*** Модели с билинейным взаимодействием между подсистемами широко используются для описания систем различной природы. Примеры решений для этих моделей позволяют продемонстрировать, как взаимовлияние компонент приводит к моделям иерархически организованных систем, появлению *когерентной стохастической коллективной, управляющей переменной.*

1. Рассмотрим модель многоэлементной системы при присутствии возмущений:

$$dx_l(t) = (\alpha_l(t)x_l(t) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^l(t)x_l(t)x_j(t))dt + \sigma_l(t)x_l(t)dw_l(t) +$$

$$+ x_l(t)\int g_l(t,\gamma)\mu_l(dt,d\gamma); \quad x_l(t)|_{t=0} = x_l(0), l = \overline{1,n}.$$

где $w_l(t)$, $\mu_l(\Delta t, \Delta\gamma)$, соответственно – не обязательно независимые винеровские и стандартные пуассоновские процессы и не обязательно независимые для разных l; относительно $\beta_j^l(t), \alpha_l(t), \sigma_l(t), g_l(t,\gamma)$, будем предполагать, что если они и терпят разрыв, то первого рода, а на участках непрерывности соответствуют условию Липшица; $t \in [0,T]$;

$$\mathrm{M}[\mu_l(dt,d\gamma)] = dt\Pi_l(d\gamma), \int_0^T dt \int |g_l(t,\gamma)|^2 \, \Pi_l(d\gamma) < \infty, \forall l = \overline{1,n},$$

и $\int$, как принято, компактная запись $\int_{(y)}$– интеграла по пространству параметров.

Приведенные требования являются достаточными для существования и единственности решения системы (1) [1].

Введем новую переменную:

$$z_l(t) = x_l(t)\exp\left\{-\int_0^t \sum_{j=1}^n \beta_j^l(\tau)x_j(\tau)d\tau\right\}, \; z_l(0) = x_l(0). \quad (2)$$

При замене (2) уравнение (1) переходит $\forall l = \overline{1,n}$ в следующее:

$$\begin{aligned} dz_l(t) &= \alpha_l(t)z_l(t)dt + \sigma_l(t)z_l(t)dw_l(t) + \\ &+ z_l(t)\int g_l(t,\gamma)\mu_l(dt,d\gamma), \;\; z_l(0) \quad x\,(0). \end{aligned} \quad (3)$$

Решение $z_l(t)$ уравнения (3) имеет вид:

$$z_l(t) = x_l(0)\exp\left[\int_0^t (\alpha_l(\tau) - \sigma_l^2(\tau)2^{-1})d\tau + \int_0^t \sigma_l(\tau)dw_l(\tau)\right] \times$$
$$\times \exp\left[\int_0^t \int \ln|1 + g_l(\tau,\gamma)|\,\mu_l(d\tau,d\gamma)\right].$$

В этом можно убедиться, продифференцировав (4) по t, опираясь на обобщенную формулу Ито [1].

Подставив в (4) преставление (2), приходим к равенству:

$$x_l(t)\exp\left\{-\int_0^t \sum_{j=1}^n \beta_j^l(\tau)x_j(\tau)d\tau\right\} =$$
$$= \exp\left[\int_0^t (\alpha_l(\tau) - \sigma_l^2(\tau)2^{-1})d\tau + \int_0^t \sigma_l(\tau)dw_l(\tau)\right] \times$$
$$\times \exp\left[\int_0^t \int \ln|1 + g_l(\tau,\gamma)|\,\mu_l(d\tau,d\gamma)\right] x_l(0).$$

При условии

$$\beta_j^l(t) = \beta_j(t), \; \forall \, l = \overline{1,n} \quad (6)$$

опираясь на (5), появляется возможность построить отдельное уравнение для коллективной переменной:

$$y(t) = \sum_{l=1}^n x_l(t)\beta_l(t) \quad (7)$$

Действительно, умножив (5) справа и слева $\beta_l(t)$на и суммируя по l, получим:

$$\left(\sum_{l=1}^n x_l(t)\beta_l(t)\right)\exp\left\{-\int_0^t \left(\sum_{j=1}^n \beta_j(\tau)x_j(\tau)\right)d\tau\right\} =$$
$$= \sum_{l=1}^n (\beta_l(t)x_l(0))\exp\left\{\int_0^t \left(\alpha_l(\tau) - \frac{\sigma_l^2(\tau)}{2}\right)d\tau + \int_0^t \sigma_l(\tau)dw_l(\tau)\right\} \times$$
$$\times \exp\left[\int_0^t \int \ln|1 + g_l(\tau,\gamma)|\,\mu_l(d\tau,d\gamma)\right] x_l(0).$$

Это соотношение с учетом обозначений (7) можно подать в виде:

$$\frac{d}{dt}\exp\left\{-\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = -Q(t) \quad (8).$$

где

$$Q(t) = \sum_{l=1}^n (\beta_l(t)x_l(0))\exp\left\{\int_0^t \left(\alpha_l(\tau) - \frac{\sigma_l^2(\tau)}{2}\right)d\tau + \int_0^t \sigma_l(\tau)dw_l(\tau)\right\} \times$$
$$\times \exp\left[\int_0^t \int \ln|1 + g_l(\tau,\gamma)|\,\mu_l(d\tau,d\gamma) \;\; x\,(0).\right.$$

Проинтегрируем (8) по t:

$$\exp\left\{-\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} - 1 = -\int_0^t Q(\tau)d\tau \quad (9)$$

При условии, что

$$(\beta_{l,n}(t)x_l(0)) \le 0, \forall l, \quad (10)$$

можем от уравнения (9) перейти к представлению:

$$\int_0^t y(\tau)d\tau = -\ln\left\{1 - \int_0^t Q(\tau)d\tau\right\}.$$

После дифференцирования этого равенства по t находим:

$$y(t) = \frac{Q(t)}{1 - \int_0^t Q(\tau)d\tau}, \quad \forall t \in [0,T]. \quad (11)$$

Учитывая (10):

$$y(0) = \sum^n (\beta_l(t)x_l(0)) < 0$$

Случайная коллективная переменная $y(t)$ (7), (11) играет роль *когерентного случайного возмущения,* в поле которого эволюционируют процессы $x_l(t)$, в силу условий (6) и (10) являющиеся решением уравнений (1) вида:

$$\begin{cases} dx_l(t) = (\alpha_l(t) + y(t))x_l(t)dt + \sigma_l(t)x_l(t)dw_l(t) + \\ \qquad + x_l(t)\int g_l(t,\gamma)\mu_l(dt,d\gamma); \qquad x_l(t)|_{t=0} = x_l(0), \, l = \overline{1,n} \end{cases},$$

и их можно рассматривать как «независимые» $\forall l = \overline{1,n}$.

Отметим, что относительно $\alpha_l(t), \beta_l(t), \sigma_l(t), l = \overline{1,n}$, не делалось предположений об их детерминированности. Не является ограничением и требование зависимости только от t.

2. Рассмотрим модели, которые сводятся к стохастическим уравнениям билинейного типа (1):

$$dx_i(t) = \alpha_i(t)x_i(t)dt + \gamma x_i(t)\sum_{j=1}^{n} \beta_j^i(t)x_j^m(t)dt +$$
$$+ x_i(t)[\sigma(t)dw_i(t) + \int g_i(t,\gamma)\mu_i(dt,d\gamma)].$$

Такие системы появляются, например, в теории нелинейных колебаний. От этого уравнения, воспользовавшись обобщенной формулой Ито [1] для переменной $z_i(t) = x_i^m(t)$, приходим к уравнению вида (1):

$$dz_i(t) = \left(\alpha_i(t)m + \frac{\sigma^2(m-1)m}{2}\right)z_i(t)dt + \gamma m z_i(t)\sum_{j=1}^{n} \beta_j^i(t)z_j(t)dt +$$
$$+ \sigma m z_i(t)dw_i(t) + z_i(t)\int[(1+g_i(t,\gamma))^m - 1]\mu_i(dt,d\gamma).$$

Выводы. Сохранение связи с реальностью – условие рационального восприятия и преобразования мира. По нашему мнению, при описании (моделировании) явлений в сложноорганизованных системах это достигается за счет того, что исходной ступенью в познании является не попытка объяснения нового на основе известных ранее законов, а определение, путем обработки конкретных эмпирических данных «скрытого» порядка, закономерностей, то есть устойчивых пространственных и временных зависимостей. Рациональность такого подхода заключается в том, что он позволяет, не вдаваясь в детали, ограничиться первоначально феноменологическим описанием установившихся глобальных, укрупненных, осредненных отношений между наблюдаемыми величинами, не касаясь фундаментальных вопросов их возникновения, и использовать найденные закономерности в практической деятельности. Построенная на основе выявленных закономерностей модель изучаемого явления, отображая наиболее существенное для него в силу согласованности всех уровней организации материального мира, содержит и «скрытое» знание о них, то есть возможность выйти за рамки первоначального применения этих законов и охватить более широкий круг реальности. Этим объясняется эффективность методов аналогий и ассоциаций, вероятный успех в познании окружающего мира на основе модификаций известных моделей. Расширение такое не всегда однозначно. В дальнейшем селекция моделей и подходов происходит при сравнении их с реальными наблюдениями.

В статье обобщены и расширены некоторые результаты работ автора, связанные с моделированием многоэлементных систем, систем с сильной взаимосвязью. Наиболее близко содержание статьи согласуется с выводами миографии [2]. В [2] приведены и дополнительные ссылки.

Список литературы:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.

2. Дубко В.А. В поисках скрытого порядка (Методологические проблемы изучения регионов) / В.А. Дубко, Ф.Н. Рянский, Э.М. Сороко, В.Н. Шолпо, В.В. Юшманов – Владивосток: Дальнаука, 1995. – 118 с. – Электронный ресурс. Режим доступа: http://openevolvingsystems.narod.ru/1995_DoobkoRjansky/1995_DoobkoRjansky5.djvu).

МОДЕЛІ УЗГОДЖЕНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ ЛОКАЛЬНИХ ТА ГЛОБАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БАГАТОЕЛЕМЕНТНИХ СИСТЕМ

Розглянуто особливості опису та моделювання локальних і глобальних показників багатоелементних систем.

Ключові слова: *системні змінні, колективні змінні, надійність.*

MODELS OF HARMONIZATION OF LOCAL AND GLOBAL CHARACTERISTICS FOR MULTI-ELEMENT EVOLVING SYSTEMS

Features description and modeling of local and global indicators of the multiple systems.

Key words: *system variables, dynamic variables, reliability.*