

УДК 543.421:621.38

**Вербицкий В.Г.**

Запорожская государственная инженерная академия

**Полякова Н.П.**

Запорожская государственная инженерная академия

**Татиевский Д.Н.**

Запорожская государственная инженерная академия

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ АВТОПОЕЗДА ВДОЛЬ ПРОГРАММНОЙ КРИВОЙ

*В статье рассмотрена возможность реализации управляемого движения седельного автопоезда (тягача с прицепом) по программной траектории, задаваемой в явном, неявном, параметрическом виде или законом изменения ее кривизны. При этом угол поворота управляемого колесного модуля является функцией кривизны программной траектории и текущих фазовых переменных модели сочлененного экипажа. Исследована возможность движения автопоезда в заданном коридоре и вычислена минимально допустимая ширина такого коридора. Также реализован процесс проектирования траектории в виде кусочно-непрерывной функции. Особое значение в исследовании уделено реализации управления по типичным практическим маневрам водителя автопоезда: переставка (обгон), задаваемая в виде двух арктангенсоид, поворот на 90 градусов, движение по дуге клотоида. Для маневра поворот на 90 градусов исследована зависимость управления и угла складывания от скорости движения автопоезда. Важной особенностью исследования явилась разработка программного обеспечения, позволившего выполнить наглядную визуализацию маневров движения в системе Unity 3D.*

**Ключевые слова:** программная траектория, курсовой угол, кривизна кривой, динамический коридор, эквидистанта, клотоида.

**Постановка проблемы.** В реальных условиях водителю автопоезда приходится довольно часто маневрировать в ограниченной дорожной обстановке. Автопоезд должен иметь возможность изменять направление движения. Это необходимо при маневрировании в местах погрузки и разгрузки на небольшой площади, на городских дорогах, характеризующихся большим количеством поворотов. Иногда возникает необходимость движения задним ходом или потребность в полном развороте на ограниченной площади. Поэтому важно, владея информацией о форме безопасного коридора для движения, реализовать траекторию движения автопоезда, приближенную при данных условиях к теоретической. При этом необходимо решить задачу о возможности движения автопоезда внутри такого коридора и вычислить его минимально допустимую ширину.

Траектория маневрирования может быть представлена совокупностью криволинейных участков, которые можно аппроксимировать, например, простейшими переходными кривыми. Развитие компьютерных технологий упрощает процесс графического построения программных траекторий.

При исследовании динамики плоскопараллельного движения автопоезда немаловажным аспектом является синтез управления (закон управления колесным модулем) для обеспечения безопасного движения, близкого к программной траектории, что требует построения алгоритма и способов формирования управляющих воздействий на колесный модуль. Задача реализации синтеза управления является актуальной в теории и практике любых колесных экипажей в виду стремительного развития электронных систем управления.

**Анализ последних исследований и публикаций.** В работах В.Г. Вербицкого, В.И. Павлюка рассмотрена реализация закона управления автомобилем на основе информации о геометрических характеристиках (кривизны траектории или закона изменения курсового угла) программной кривой. Тот факт, что любой функции управления соответствует единственная траектория движения автомобиля, задаваемая уравнением кривизны траектории, и наоборот, любой гладкой траектории движения автомобиля соответствует единственная функция управления, установлен в исследованиях Ф.Д. Мисюры и Е.А. Митюшова [1; 2; 3].

Для отдельного автомобиля с параметрически задаваемой траекторией движения его центра масс закон управления реализован в работе С.А. Берестова, Н.Е. Мисюры и Е.А. Митюшова. Для параметрически и неявно заданной траектории движения трехколесного робота синтез управления выполнен в исследованиях Е.В. Письменной [4; 5].

Также известны подходы, использующие управление с обратной связью (PID-контроль). В работе Дж. Чжун рассматривается подход к задачам маневрирования и синтезу соответствующего управления, аналогичный работе В.Г. Вербицкого, применительно к автопоезду, а не к отдельному автомобилю [1; 6].

**Формирование цели статьи (постановка задачи).** Реализовать аналитический синтез управления движением автопоезда, кинематика и динамика которого описывается нелинейными дифференциальными уравнениями неголономной механики. Синтез выполнен с учетом требований к качеству процесса движения автопоезда по программируемой траектории – по ее геометрическим характеристикам (по известному закону изменения курсового угла программной траектории). Цель статьи – исследование возможности прохождения программируемой траектории в заданном коридоре и вычисление его минимальной ширины, необходимой для такого прохождения.

**Изложение основного материала исследования.** Рассматривается плоская велосипедная модель движения автопоезда [7]. Схема сочлененного экипажа приведена на рисунке 1, здесь  $v$  – продольная составляющая центра масс тягача;  $\theta$  – угол поворота управляемого модуля;  $a$ ,  $b$  – расстояние от центра масс тягача до центров передней (управляемой) оси и задней оси тягача;  $c$  – расстояние от центра масс тягача до точки сцепки со вторым звеном;  $d_1$  – расстояние от центра масс второго звена до точки сцепки с тягачом;  $Y_i$  – силы увода на осях, коэффициенты сопротивления уводу на осях ( $k_1$ ;  $k_2$ ;  $k_3$ );  $m$  – масса тягача;  $u$  – поперечная проекция вектора скорости центра масс тягача;  $\omega$  – угловая скорость тягача относительно вертикальной оси;  $m_2$  – масса второго звена;  $v_1$ ,  $u_1$  – продольная и поперечная проекции вектора скорости центра масс полуприцепа;  $\varphi$  – угол складывания (угол между продольной осью тягача и полуприцепа).

Модель учитывает воздействие линейных боковых сил увода  $Y_i$ , которые согласно аксиоматике Рокара определяются соотношением:  $Y_i = k_i \cdot \delta_i (i = 1, 2, 3)$ , где  $\delta_i (i = 1, 2, 3)$  – углы увода (приведенные) на осях.

В системе Maple выражения для динамических уравнений записаны в виде:

$$\begin{aligned} e_1 &:= -m * (U + \omega * v) + Y_1 + \cos(\phi) * Y_3 - 2 * m_2 * \sin(\phi) * \omega * d_1 * \\ & \quad \phi + m_2 * \sin(\phi) * d_1 * \phi^2 + m_2 \cos(\phi) * \\ & \quad * d_1 * \omega - m_2 \cos(\phi) * d_1 * PP \\ & \quad + m_2 * \sin(\phi) * d_1 * \omega^2 + Y_2 - m_2 * \\ & \quad * U + m_2 * c * \omega - m_2 \omega * v; \\ e_2 &:= c * m_2 * \omega * v - b * Y_2 - J * \\ & \quad * \omega + c * m_2 \cos(\phi) * d_1 * PP - c * m_2 \sin(\phi) * \\ & \quad * d_1 * \phi^2 - c * m_2 \cos(\phi) * d_1 * \\ & \quad * \omega + a * Y_1 * m_2 * U - m_2 c^2 * \omega - c * \\ & \quad \cos(\phi) * Y_3 - c * m_2 \sin(\phi) * d_1 * \\ & \quad * \omega^2 + 2 * c * m_2 \sin(\phi) * \omega * d_1 * \phi; \\ e_3 &:= -J_2(\omega - PP) - L_1 * Y_3 + d_1 * \cos(\phi) * \\ & \quad * m_2 * U + d_1 * \cos(\phi) * m_2 * v - d_1 * \\ & \quad \sin(\phi) * m_2 \omega * u - d_1^2 * m_2 * \\ & \quad * \omega + d_1^2 * m_2 * PP - c * m_2 * \cos(\phi) * d_1 * \\ & \quad \omega + c * m_2 \sin(\phi) * d_1 \omega^2. \end{aligned}$$

В этих выражениях (система дифференциальных уравнений движения):  $U$  – производная боковой составляющей центра масс,  $\omega$  – производная угловой скорости ( $\omega$ ) относительно вертикальной оси,  $\phi$  – скорость изменения угла поворота ( $\phi$ ) заднего звена;  $PP$  – угловое ускорение заднего звена.

Вычислив якобиан системы  $J_{oo}$ , получим характеристическое уравнение:

$$chp := \text{linalg}[\text{charpoly}](J_{oo}, \lambda);$$

и его корни:

$$eigv := \text{evalf}(\text{solve}(chp, \lambda)).$$

Приложение определяет момент появления корня с неотрицательной действительной частью при варьировании значения скорости.

При этом управление  $\theta$ , которое входит в уравнение (1):

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{v}, \quad (1)$$

вычислено в символьном виде в системе Maple.

1. Движение по программной траектории. Изменения декартовых координат центра масс и курсового угла определяются кинематическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= v * \cos \psi - u * \sin \psi; \\ \dot{y}_c &= v * \sin \psi - u * \cos \psi; \\ \dot{\psi} &= \omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений, определяющая программную траекторию, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\psi}(t); \\ \dot{x} &= v * \cos \psi; \\ \dot{y} &= v * \sin \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих уравнениях  $\psi$  – курсовой угол, скорость изменения связана с кривизной траектории соотно-

шением  $\psi = Kr * v$ , где кривизна  $Kr$  для явно или параметрически заданной кривой вычисляется по известным формулам дифференциальной геометрии.

Закон изменения угла поворота колесного модуля определяется из равенства радиусов кривизны реальной и теоретической кривых. Для вычисления кривизны реальной траектории  $Kr = 1 / \rho_c$  воспользуемся формулой (4) [1]:

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{V_c^2 \omega}{V_c^2 \sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{iv}{V_c^2 \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{iv}{\sqrt{(u^2 + v^2)^3}} \quad (4)$$

В этом случае угол поворота управляемого колесного модуля является функцией кривизны программной траектории и текущих фазовых переменных модели автопоезда. В системе Maple находится как результат решения уравнения:

$$\text{theta} := \text{solve}(\omega / \text{sqrt}(u^2 + v^2) + U * v / \text{sqrt}(u^2 + v^2)^3 = Kr, \text{theta}),$$

где  $U$  – производная боковой составляющей скорости центра масс.

Таким образом, для управления движением по заданной траектории используется ее кривизна  $Kr = \frac{\psi}{v}$ . Угол поворота управляемого колесного модуля  $\theta$  является функцией кривизны программной траектории и текущих фазовых переменных модели.

Задаем значения констант, начальные значения переменных модели движения автопоезда и программируемой кривой, а также закон изменения курсового угла  $\psi(t) = 0.3 * \sin(t)$  («змейка»):

$$\begin{aligned} g &= 9.81 \text{ м} / \text{с}^2; a = 3.376 \text{ м}; b = 4.217 \text{ м}; b_1 = 8.075 \text{ м}; \\ c &= 3.376 \text{ м}; m = 6417 \text{ кг}; m_2 = 41846 \text{ кг}; \\ k_1 &= 300000 \text{ Н} / \text{рад}; k_2 = 300000 \text{ Н} / \text{рад}; k_3 = 300000 \text{ Н} / \text{рад}; \\ \text{kappa}1 &= 0.8; \text{kappa}2 = 0.8; \text{kappa}3 = 0.8; \text{theta} = 0; \text{phi}(0) = -0.2 \text{ рад}; \\ v &= 5 \text{ м} / \text{с}; KOL = 2.2 \text{ м}; \text{kappa} = 1.7. \end{aligned}$$

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений в среде Maple дает возможность сопоставить реальную и программную траектории (рис. 2).

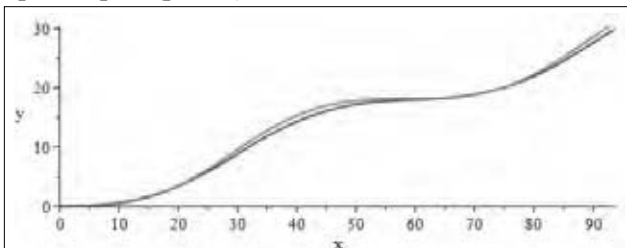


Рис. 2. Реальная и программная траектории

При этом тягач и прицеп будут двигаться по траекториям, показанным на рис. 3 (траектория тягача изображена красным).

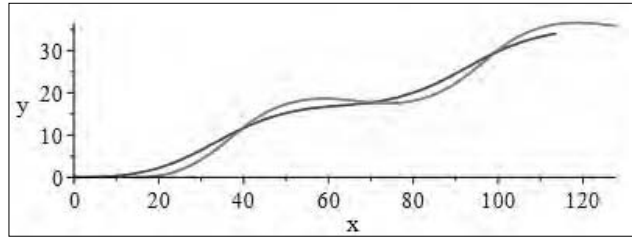


Рис. 3. Траектории движения тягача и прицепа

Следовательно, задавая программную траекторию движения некоторой явной функцией  $y = f(x)$  или параметрически  $\{x = x(t), y = y(t)\}$ , в частности  $\{x = t, y = f(t)\}$ , закон изменения курсового угла (из геометрического смысла производной)  $\psi = \text{arctg}(y')$ . Скорость изменения курсового угла составит:

$$\dot{\psi} = \frac{vy''_{xx}}{(1 + (y'_x)^2)^{3/2}} \quad (5)$$

для заданной явно функции или при параметрическом ее задании:

$$\dot{\psi} = v * \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad (6)$$

Отметим, что при движении по траектории, заданной как функция координат, необходимо соблюдение условия монотонности изменения аргумента функции. Однако существуют траектории, содержащие петли, тогда это условие не будет выполняться. В этом случае необходимо траекторию задавать исключительно в параметрическом виде.

После подстановки в систему (3) и ее численного интегрирования получается кривая, совпадающая с программной траекторией (рис. 2).

По результатам численного интегрирования получаем дискретные наборы координат траекторий движения тягача и прицепа, углов поворота рулевых колес и углов складывания, для моделирования движения в системе Unity 3D и для управления робототехнической установкой. На рис. 4 представлен фрагмент моделирования при движении «по змейке».

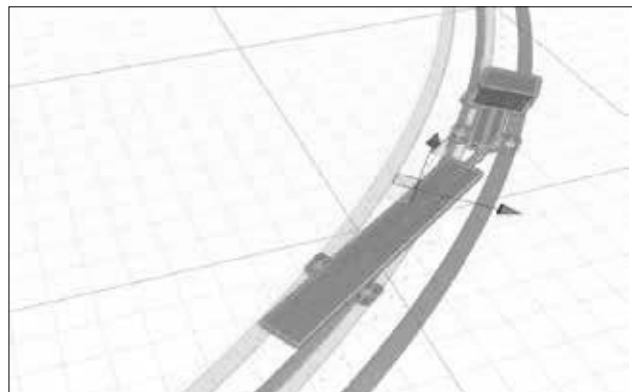


Рис. 4. Фрагмент результатов моделирования в системе Unity 3D

Для автоматизации процесса исследования возможности движения автопоезда по программируемой траектории разработано приложение на языке C#, позволяющее выполнять автоматизированный сценарий на языке Maple с помощью технологии Open Maple API. Что позволяет в явном виде задавать скорость изменения курсового угла или траекторию в параметрическом виде.

Исследуем возможность программного движения по дуге клотоиды (кривая, у которой кривизна изменяется линейно как функция длины дуги, имеет значение в качестве переходной кривой). Клотоида в силу линейного характера графика ее кривизны является самой короткой переходной кривой, обеспечивающей непрерывность функции кривизны с минимально возможным для этой длины темпом изменения, соответственно, и с минимальной скоростью нарастания центробежной силы при постоянной скорости движения на ней. Все другие кривые, равные клотоиде по экстремальному для этих кривых значению темпа нарастания кривизны, будут либо длиннее клотоиды, либо будут иметь участки с большим, чем у клотоиды, темпом изменения кривизны и, соответственно, с большей скоростью нарастания центробежной силы для той же постоянной скорости движения, что и по клотоиде.

Параметрически клотоида может быть представлена через интегралы Френеля:

$$\vec{r}(t) = (aC(t), aS(t)).$$

Интегралы Френеля  $S(u)$  и  $C(u)$  – это специальные функции:

$$S(t) = \int \sin(u^2) du, \quad C(t) = \int \cos(u^2) du.$$

В соответствующие поля приложения введем аналитические выражения (на внутреннем языке Maple):

$$\begin{aligned} X(t) &:= 200 * (\text{int}(\cos((1/2) * \text{Pi} * u^2), u = 0..t)); \\ Y(t) &:= 200 * (\text{int}(\sin((1/2) * \text{Pi} * u^2), u = 0..t)). \end{aligned} \quad (7)$$

В ходе выполнения сценария получаем необходимые фазовые портреты с генерированием необходимой информации для моделирования в системе Unity 3D (рис. 5).

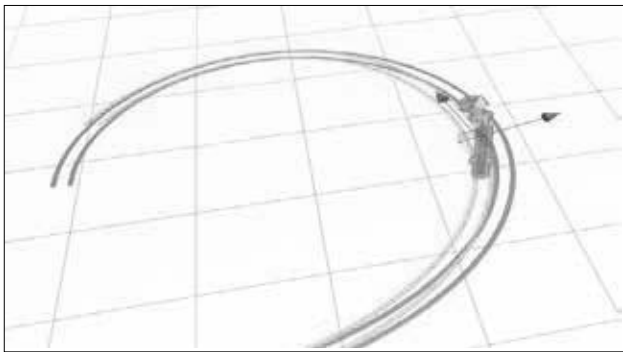


Рис. 5. Моделирование движения по дуге клотоиды

Для маневра «поворот на 90 градусов» исследована зависимость управления от скорости движения автопоезда (рис. 6).

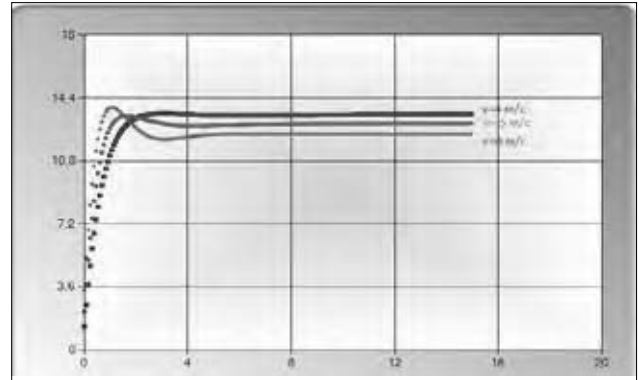


Рис. 6. Зависимость управления от скорости движения

Следует отметить, что приведенная тенденция уменьшения управления не носит абсолютного характера и соответствует приведенным выше параметрам модели. Изменив характер поворачиваемости автопоезда путем уменьшения параметра  $m_2=5000$  кг, наблюдаем противоположную тенденцию (рис. 7).

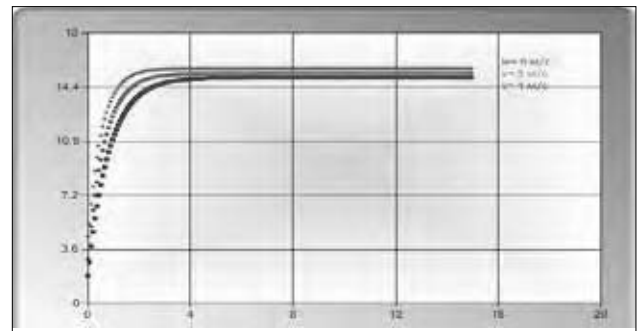


Рис. 7. Зависимость управления от скорости движения (недостаточная поворачиваемость)

Зависимость угла складывания от скорости движения изображена на рис. 8, тенденция отражает факт выброса прицепа во внешнюю сторону поворота при возрастании скорости автопоезда.

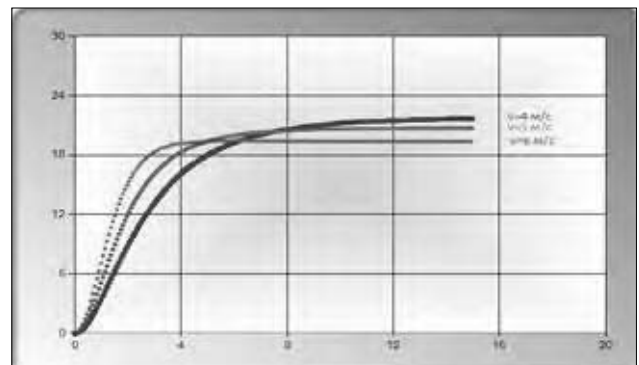


Рис. 8. Зависимость угла складывания от скорости движения

Необходимо отметить, что для чисто кинематических моделей эти тенденции не выражены и имеет место абсолютное приближение исследованных параметров к соответствующим асимптотам [8].

2. Возможности движения в заданном коридоре. Пусть  $W$  – желаемая ширина коридора, вокруг программной траектории строим две эквидистанты на расстояниях  $h = \pm W / 2$  по известным формулам дифференциальной геометрии.

В случае аналитического задания траектории:

$$x = \zeta(t), y = \eta(t) \forall t \in [a, b];$$

$$x = \xi \pm \frac{h \cdot \eta'}{((\zeta')^2 + (\eta')^2)^{1/2}} ;$$

$$y = \eta \mp \frac{h \cdot \zeta'}{((\zeta')^2 + (\eta')^2)^{1/2}} .$$

При дискретном ее представлении (по результатам численного интегрирования) используем формулы (8) [9]:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \pm h \cdot \sin(\alpha); \\ y &= y_0 \mp h \cdot \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha$  – угол наклона касательной в точке  $(x_0, y_0)$  основного контура;

$\tan(\alpha) = dy / dx$  – отношение приращения координат;

$(x, y)$  – координаты эквидистант.

Гарантированное прохождение внутри программного коридора контролируется проверкой нахождения внутри него пары эквидистант, обрамляющих реальную траекторию и отстоящих от нее на расстоянии  $\pm D / 2$ , где  $D$  – максимальный габаритный (динамический) коридор автопоезда, который вычисляется с учетом ширины кузова автопоезда и смещения прицепа. Таким образом, динамический коридор рассматривается как полоса движения автопоезда. На прямолинейных участках она равна ширине кузова автопоезда  $W_b$ , на криволинейных участках – ширине кузова автопоезда плюс величина  $h_b$  – смещение прицепа (полуприцепа).

На рис. 4 можно видеть, что наибольшей величины динамический коридор достигает в середине поворота и определяется как разность наружного и внутреннего радиусов поворота.

Случаи прохождения или непрохождения программного коридора контролируются программно приложением, фрагмент которого показан на рис. 9.

Следует отметить, что на возможность успешного прохождения оказывает влияние не только габаритная ширина автопоезда, но и степень отклонения реальной траектории от программной.

Эта же задача решена в контексте вычисления минимально допустимой ширины динамического коридора, для чего реальная траектория обрамляется эквидистантами переменной ширины  $l_i = \pm(h_i + W_b) / 2$ , рассчитываемой для дискретного набора радиусов кривизны (рис. 10). Смещение  $h_i$  вычисляется с учетом отклонения траектории тягача (красным) и прицепа (синим) от средней линии (магента).

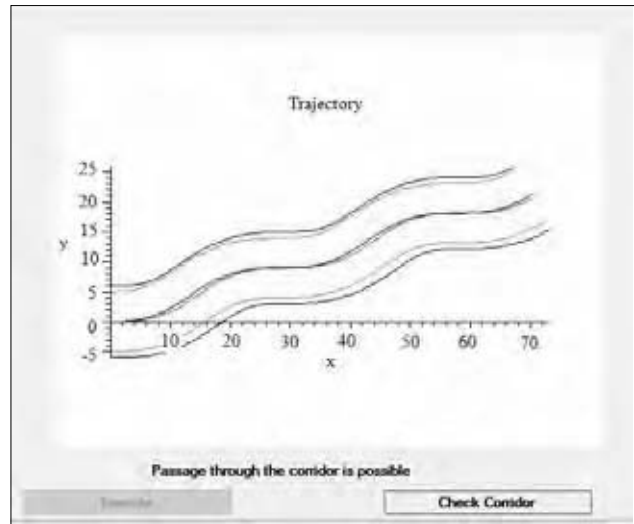


Рис. 9. Возможность прохождения в заданном коридоре

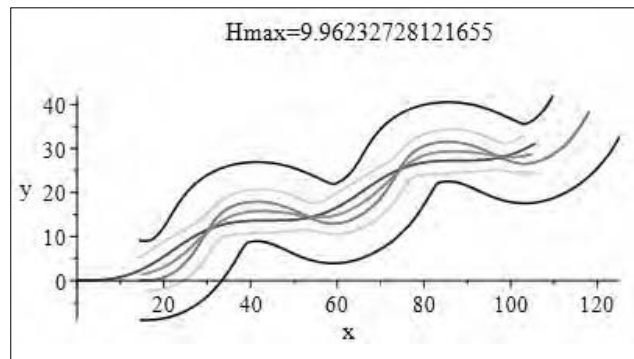


Рис. 10. Вычисление минимально допустимой ширины динамического коридора

Максимальная ширина такой эквидистанты (зеленым) будет равна минимальной ширине искомого коридора  $h_{\min} = \max(l_i)$ .

Для прямолинейного и кругового движения ширина коридора будет постоянной в силу константности радиусов траекторий (рис. 11, рис. 12).

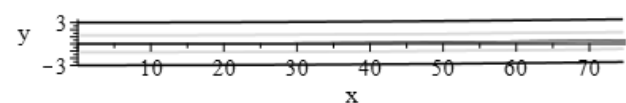


Рис. 11. Динамический коридор при прямолинейном движении

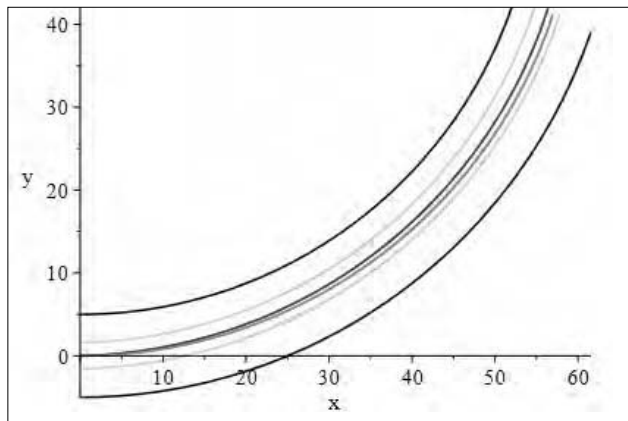


Рис. 12. Динамический коридор при движении по окружности

На рис. 13 представлено движение по дуге клотоиды, заданной приведенными выше соотношениями (8).

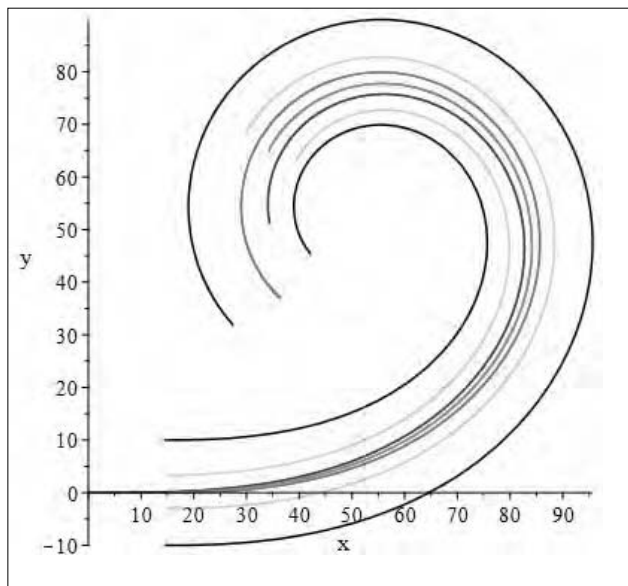


Рис. 13. Динамический коридор при движении по клотоиде

При этом следует иметь в виду, что минимальная ширина этого коридора будет зависеть от скорости в силу описанных выше исследований по углу складывания (рис. 14 и рис. 15).

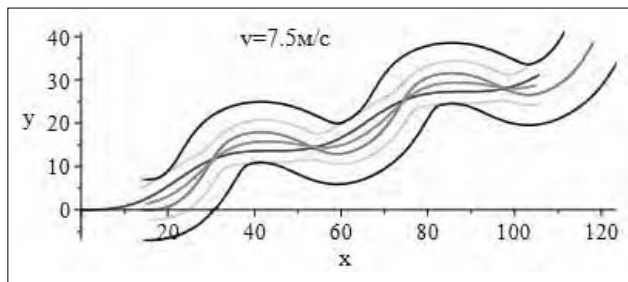


Рис. 14. Непрохождение коридора при скорости 7,5 м/с

Однако этот же коридор проходим на более высокой скорости.

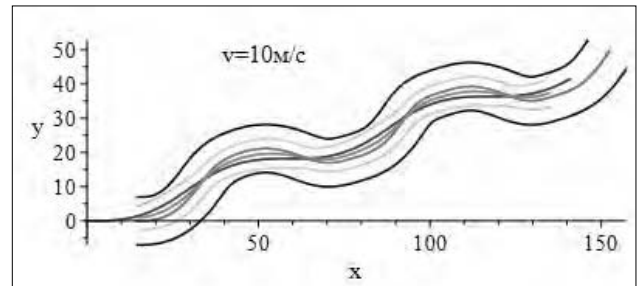


Рис. 15. Прохождение коридора на скорости 10 м/с

На всех приведенных выше рисунках черные эквидистанты обрамляют желаемый коридор, зеленые – реальный, вычисленный с учетом габаритов автопоезда и смещения прицепа.

На рис. 16 представлен фрагмент моделирования движения автопоезда внутри желаемого коридора в среде Unity 3D.

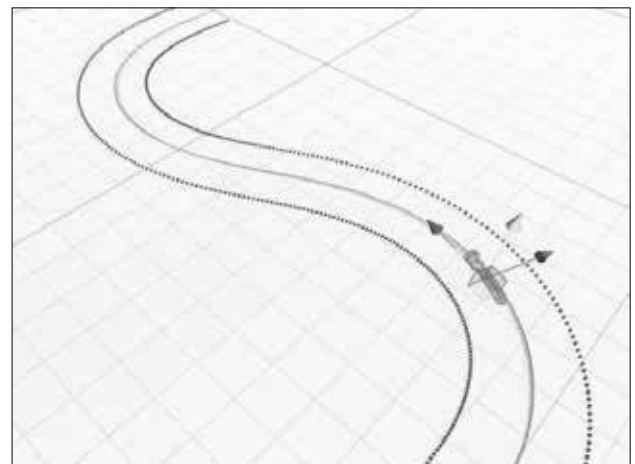


Рис. 16. Движение автопоезда по заданному коридору

3. Возможности реализации движения по траектории, заданной кусочно-непрерывной функцией. В приложении такая возможность реализована в виде выполнения сценария, записанного в соответствующий файл. При этом для первого участка траектории задаются условия Коши в виде начальных координат, для последующих сегментов эти условия представляют собой конечное состояние предыдущих. Также задается формула траектории явным ее представлением, неявно – параметрически или кривизной, а также время движения по этой траектории.

На рис. 17 представлено движение по стадиону по траектории, заданной двумя прямолинейными участками и двумя полуокружностями.

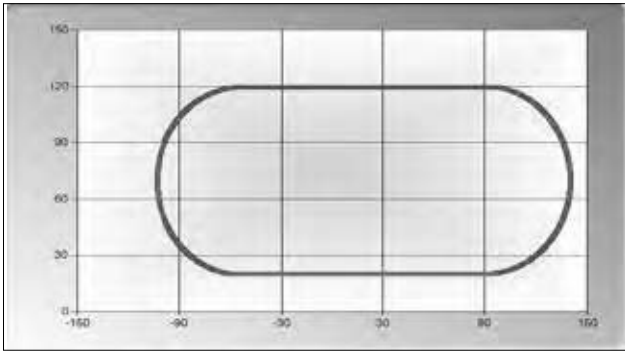


Рис. 17. Движение автопоезда по стадиону

Траектория в виде комбинации двух переставок (обгон), заданных арктангенсоидами, изображена на рис. 18.

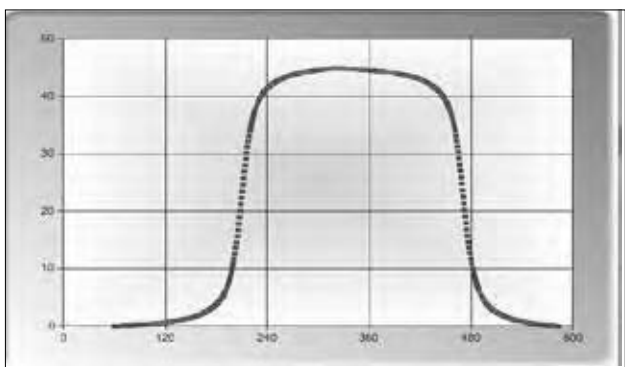


Рис. 18. Маневр «обгон»

Для траектории, спроектированной в виде кусочно-непрерывной функции, реализована возможность выполнить ее сглаживание с помощью клотоидной вставки – переходной кривой,

заданной уравнением (8), с учетом возможности ее смещения и поворота. Данная кривая обладает уникальным свойством – кривизна ее линейно увеличивается при увеличении ее длины, что на практике означает линейное (во времени) увеличение центростремительного ускорения при постоянной скорости движения автопоезда, и, следовательно, является оптимальным режимом для его движения.

**Выводы.** Таким образом, приходим к выводу, что по известному закону изменения курсового угла можно получить траекторию движения автопоезда. То есть можно осуществлять управляемое движение автопоезда по некоторой заданной траектории и прогнозировать возможности его движения в коридоре требуемой ширины. Также возможно вычислить минимально допустимую ширину такого динамического коридора. При этом программная траектория может быть задана явно, неявно, параметрически или законом изменения своей кривизны.

Результаты исследований моделировались в системе Unity 3D и могут быть использованы напрямую для управления соответствующей робототехнической установкой, обеспечив ее движение по программируемой траектории в заданном коридоре.

В дальнейшем планируется серия экспериментов со специально разрабатываемой робототехнической установкой и интегрирование разработанного механизма клотоидного сглаживания в процесс проектирования кусочно-непрерывной траектории.

#### Список литературы:

1. Вербицкий В.Г., Банников В.А., Червякова Е.В., Белевцова Н.Л. К вопросу реализации управляемого движения вдоль программной кривой. Вісник Донецької академії автомобільного транспорту. 2012. № 3. С. 67–73. URL: [http://www.diat.edu.ua/journal/files/2012/3\\_2012.pdf](http://www.diat.edu.ua/journal/files/2012/3_2012.pdf)
2. Павлюк В.І. Моделювання неусталеного криволінійного руху автомобіля. Наукові нотатки. Луцьк ЛНТУ. 2010. № 28. С. 374–379.
3. Мисюра Ф.Д., Митюшов Е.А. Расчет формы траектории транспортного средства и принцип рулевого управления Аккермана. Винчестерский колледж, Великобритания, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». Екатеринбург, Россия. URL: <https://www.scienceforum.ru/2015/pdf/15215.pdf>
4. Берестова С.А., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Кинематическое управление движением колесных транспортных средств. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. № 2. С. 254–266. URL: <http://www.mathnet.ru/links/00c7a350bc696abbc8487af24b20e556/vuu482.pdf>
5. Письменная Е.В. Алгоритмы управления движением мобильного робота по заданным траекториям. Новые технологии, Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 3. С. 16–23. URL: [http://novtex.ru/mech/mech2013/Mh313\\_web.pdf](http://novtex.ru/mech/mech2013/Mh313_web.pdf)
6. Zhong J. PID Controller Tuning: a short tutorial. Mechanical Engineering, Purdue University. 2006. P. 16. URL: <https://cdn.instructables.com/ORIG/FC1/NAZC/IVA51KF1/FC1NAZCIVA51KF1.pdf>
7. Verbitsky V., Bezverkhyi A., Tatievskiy D., Handling Analysis and Defining Conditions of Dangerous-Sfe Divergent Stability Loss of a Two-Link Road Train Nonlinear Model. Mathematical Modelling and Applications.

2018. Vol. 3. № 2. P. 31–38. URL: <http://www.sciencepublishinggroup.com/journal/paperinfo?journalid=247&doi=10.11648/j.mcs.20180301.13>

8. Tatievskiy D. Synthesis of the laws governing the non-holonomic model of a two-link road train with reverse motion (off-axle hitching model). Eureka: Physics and Engineering. 2018. № 2. P. 40–51. URL: <http://eu-jr.eu/engineering/article/view/592/601>

9. Ерохин В.В. Реализация геометрической задачи в станках с ЧПУ. Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2017. № 2. С. 135–141. URL: <http://ntv-brgu.ru/wp-content/arhiv/2017-N2/2017-02-02.pdf>

### **ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ КЕРОВАНОГО РУХУ АВТОПОЇЗДА ВЗДОВЖ ПРОГРАМНОЇ КРИВОЇ**

*У статті розглянута можливість реалізації керованого руху сидельного автопоїзда (тягача з причепом) з програмної траєкторії, що задається в явному, неявному, параметричному вигляді або законом зміни її кривизни. При цьому кут повороту керованого колісного модуля є функцією кривизни програмної траєкторії і поточних фазових змінних моделі зчленованого екіпажу. Досліджено можливість руху автопоїзда в заданому коридорі і обчислена мінімально допустима ширина такого коридору. Також реалізований процес проектування траєкторії у вигляді кусково-неперервної функції. Особливе значення в дослідженні присвячено реалізації управління типовими практичними маневрами водія автопоїзда: перестроювання (обгін), що задається у вигляді двох арктангенсоїд, поворот на 90 градусів, рух по дузі клотоїди. Для маневру поворот на 90 градусів досліджена залежність управління і кута складання від швидкості руху автопоїзда. Важливою особливістю дослідження є розробка програмного забезпечення, яке дало змогу виконати наочну візуалізацію маневрів руху в системі Unity 3D.*

**Ключові слова:** програмна траєкторія, курсовий кут, кривизна кривої, динамічний коридор, еквідистанта, клотоїда.

### **RESEARCHING OF A POSSIBILITY TO IMPLEMENT CONTROLLED ROAD TRAIN MOVEMENT ALONG A PROGRAM CURVE**

*A possibility of implementing controlled movement of a bolster-type road train (tractor truck with a trailer) along a program trajectory specified in an explicit, implicit, parametric form or with the law of changing its curvature is considered. The angle of rotation of the controlled wheel module is a function program trajectory curvature and current phase variables of the articulated vehicle model. The possibility of movement of a road train in a given corridor is investigated and the minimum allowable width of such a corridor is calculated. The process of trajectory designing in the form of a piecewise continuous function has also been implemented. Particular importance in the study is given to the implementation of controlling according to typical practical maneuvers of a road train driver: changing lane (overtaking) specified in the form of two arctangensoids, a 90 degrees turn, the movement along a clothoid arc. For the 90 degrees turn the dependence of controlling and folding angle on the road train the movement speed has been investigated. An important feature of the study is the development of software allowing to perform visualization of movement maneuvers in the Unity 3D system.*

**Key words:** program trajectory, course angle, curve curvature, dynamic corridor, equidistant, clothoid.