УДК 519.21

Дубко В.А.
Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ИТО СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ИТО

В статье рассмотрен алгоритм построения класса уравнений Ито, согласующихся с заданным первым интегралом, когда коэффициенты уравнений зависят от неконтролируемых возмущений. Доказывается, что исходную систему уравнений Ито можно дополнить, после чего расширенная система может иметь первый интеграл, зависящий от начальных и новых переменных. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: *первый интеграл, инвариантность, уравнения Ито, управление, расширенные системы.*

Введение. В теории управления важным является направление, связанное с выяснением возможности обеспечения существования сохраняющихся функционалов (жизненно важных показателей) от части динамических переменных, характеризующих состояния системы, их нечувствительности к возмущениям: задача об инвариантности с вероятностью единица.

Мы исследуем этот вопрос на примере теории первых интегралов системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито. Приведем и докажем, опираясь на наши предыдущие работы, теоремы о классах СДУ, согласующихся с наперед заданными первыми интегралами.

Исследования в этом направлении были первоначально проведены в работе [2]. В дальнейшем подобные исследования продолжены в работах других авторов, например, [7]. В [7] приведены и ссылки на работы, связанные с применением теории первых интегралов в задачах программного управления.

Первые интегралы уравнений Ито

Пусть $x(t)$ – решение системы СДУ Ито

$$dx(t)=a\left(x(t);t\right)dt+b_k\left(x(t);t\right)dw_k(t),$$
$$x\left(t;x(0)\right)\big|_{t=0}=x(0),\ k=\overline{1,m}, \qquad (1),$$

где $x(t)$, $b_k(x;t)$, $a(x;t)$ – n мерные векторы, $w_k(t)$ – независимые винеровские процессы.

В работе [2] было *введено понятие первого интеграла системы СДУ Ито* как неслучайной скалярной функции $u(t,x)$, стохастический полный дифференциал от которой равен нулю:

$$du(x(t;x(0));t)=0, \forall x(0)\in D\subset\mathbb{R}^n, \forall t\in[0,T), \qquad (2),$$

где D – односвязная область, которую, если не приводятся дополнительные ограничения, отождествляем со всем пространством.

Наличие первого интеграла означает, что с вероятностью 1 любая траектория решения $x(t;x(0))$ уравнения (2) остается на гладком многообразии, $u(x;t)=const, \quad \forall x(0)\in\{x(0)\,|\,u(0,x(0))=const\}$.

Уточнения и возможные расширения понятия первого интеграла для стохастических систем были приведены в работе [4, с. 106,107].

Условия существования первого интеграла у системы СДУ Ито

Задачи о строении класса СДУ, для которого $u(x;t)$ – первый интеграл, относится к обратным, поскольку прямые задачи связывают с отысканием для заданных уравнений первых интегралов. В [3] доказано, что класс таких СДУ существует и является следствием теорем о первых интегралах уравнений Ито, приведенных в [2; 3].

Первоначально будем полагать, что:

L.1. Выполнены ограничения на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие существование и единственность решения [1].

L.2. $u(t,x)$ непрерывно дифференцируемая по t и дважды непрерывно дифференцируемая по компонентам вектора x.

Условие *L*.2. позволяет применять формулу Ито при нахождении полного дифференциала (2).

Теорема 1. При выполнении ограничений L условия

$$1)\, b_{i,k}(x;t)\frac{\partial u(x;t)}{\partial x_i}=0;\forall k=\overline{1,m},$$
$$2)\, \frac{\partial u(x;t)}{\partial t}+\frac{1}{2}b_{i,k}(x;t)b_{j,k}(x;t)\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x_i\partial x_j}=0, \qquad (3)$$

являются необходимыми и достаточными для выполнения требования (2).

Доказательство. После применения формулы Ито к $u(t,x(t))$ приходим к равенству:

$$du\left(x(t);t\right)=\frac{\partial u\left(x(t);t\right)}{\partial t}+$$
$$+\frac{1}{2}b_{i,k}\left(x(t);t\right)b_{j,k}\left(x(t);t\right)\frac{\partial^2 u\left(x(t);t\right)}{\partial x_i\partial x_j}dt+,$$
$$+b_{i,k}\left(x(t);t\right)\frac{\partial u\left(x(t);t\right)}{\partial x_i}dw_k(t)=0;\forall k= \tag{4}$$
$$=\overline{1,m};\forall x(0)\in D,\forall t\in[0,T)$$

Применив вновь формулу Ито к $u^2(t,x(t))$, с учетом (4) приходим к равенству:

$$du^2\left(x(t);t\right)=2u\left(x(t);t\right)du\left(x(t);t\right)+$$
$$+\left(b_{i,k}\left(x(t);t\right)\frac{\partial u\left(x(t);t\right)}{\partial x_i}\right)^2dt= \tag{5}$$
$$=\left(b_{i,k}\left(x(t);t\right)\frac{\partial u\left(x(t);t\right)}{\partial x_i}\right)^2dt=0$$

Требования обращения в «0» соответствующих выражений при dt в (5), и, как следствие коэффициентов при $dw_k(t),\forall k=\overline{1,m}$, в (4) и приводит к равенствам (3), утверждению Теоремы.

Отметим, что по этой схеме производилось и установление необходимых и достаточных условий существования первых интегралов для уравнений Ито и при наличии пуассоновских возмущений [6, с. 46–47].

Для построения класса уравнений Ито, согласованных с наперед заданными выражениями для первых интегралов, опираясь на свойства матриц и представление о скалярном произведении, нам понадобится дополнительное условие:

$L.3.$ $\frac{\partial b_{i,k}\left(x;t\right)}{\partial x_j},\forall i,j=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,m}.$ – непрерывны и ограничены по совокупности переменных $x;t$.

Теорема 2. [2; 3] Пусть выполнены ограничения L. Тогда для того чтобы функция $u(t,x)$ была первым интегралом уравнения (1), необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$\begin{aligned}&1)(b_k\left(x;t\right),\nabla u\left(x;t\right))=0,\\&2)(e_0+g\ \left(x;t\right),\square u\left(x;t\right)=0,\end{aligned} \tag{6}$$

где $e_l,l=\overline{0,n}$ – набор ортогональных единичных векторов, (,) знак скалярного произведения, ∇ – знак градиента, $\square=e_0\frac{\partial}{\partial t}+\nabla$, и

$$g_i\left(x;t\right)=a_i\left(x;t\right)-\frac{1}{2}b_{j,k}\left(t;x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}b_{i,k}\left(x;t\right). \tag{7}$$

Доказательство справедливости равенств (6) опирается на равенство (3.1), при преобразовании в равенстве (3.2) с учетом L.3:

$$\frac{1}{2}b_{i,k}\left(x;t\right)b_{j,k}\left(x;t\right)\frac{\partial^2 u\left(x;t\right)}{\partial x_i\partial x_j}=$$
$$=\frac{1}{2}b_{i,k}\left(x;t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{j,k}\left(x;t\right)\frac{\partial u\left(x;t\right)}{\partial x_j}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}b_{j,k}\left(t;x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}b_{i,k}\left(x;t\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}b_{j,k}\left(t;x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}b_{i,k}\left(x;t\right).$$

Замечание 1. Если мы от уравнения Ито (1) перейдем к представлению Стратоновича (см., например, [3, с. 123]), то получим уравнение: $dx^s{}_i\left(t\right)=g_i\left(x^s\left(t\right);t\right)dt+b_{i,k}\left(x^s\left(t\right);t\right)dw_k\left(t\right)$, где $g_i\left(x^s\left(t\right);t\right)$ совпадает с выражением (7). И в этом представлении требование $du(x^s(t),t)=0$ приводят к соотношениям (5) Теоремы 1.

О первых интегралах, зависящих от части переменных

Ограничения Теоремы 2 позволяют определить СДУ Ито, согласующихся с заданным набором первых интегралов, в том числе и тогда, когда первые интегралы зависят только от части компонент.

Рассмотрим систему стохастических уравнений:

$$dx\left(t\right)=a\left(x\left(t\right);y\left(t\right);t\right)dt+b_k\left(x\left(t\right);y\left(t\right);t\right)dw_k\left(t\right),\ k=\overline{1,m},\quad x\left(t\right)|_{t=0}=x\left(0\right). \tag{8}$$

где $a\left(x;y;t\right),b_k\left(x;y;t\right)\in R^n;y\in R^{n_0}$, и полагаем, что $\forall y$ выполнены требования L.

Теорема 3. Для класса уравнений (8) с коэффициентами:

$$\begin{aligned}&1)\ b_k\left(x;y;t\right)\in\left\{q_{0,k}\left(x;y;t\right)\det B_k\left(x;y;t\right)\right\},\\&2)\ a\left(x;y;t\right)\in\left\{\begin{matrix}q_0\left(x;y;t\right)C^{-1}\left(x;t\right)\det A(t;x)-\\-\frac{1}{2}\left(b_k\left(x;y;t\right),\nabla_x\right)b_k\left(x;y;t\right)\end{matrix}\right\},\end{aligned} \tag{9}$$

где:

$$A(t;x)=\begin{bmatrix}e_0, & e_1, & \cdots & e_n\\ a_{1,0}, & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,0}, & a_{n,1}, & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix};C\left(x;t\right)=\det\begin{bmatrix}a_{1,1}, & \cdots & a_{1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n.1} & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix}\neq 0,$$

$$B_k\left(x;y;t\right)=\begin{bmatrix}e_1, & \cdots & e_n\\ q_{1,1}, & \cdots & q_{n,1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{n-1,n}, & \cdots & q_{n-1,n}\end{bmatrix},\quad\begin{cases}a_{1,i}=q_{1,i}=\frac{\partial}{\partial x_i}u\left(x;t\right),\ i=\overline{1,n};\\ a_{1,0}=\frac{\partial}{\partial t}u\left(x;t\right),\end{cases},$$

а относительно всех остальных элементов матриц и скалярных функций $q_{0,k}\left(x;y;t\right)$, $q_0\left(x;y;t\right)$ предполагается, что они выбраны так, чтобы были выполнены требования L, то функция $u(x;t)$ – первый интеграл системы (8): $du(x(t),t)=0$.

Доказательство. Дифференциал берется для $u(x(t),t)$, поэтому y надо рассматривать как параметр. Дальнейшее доказательство есть следствие равенств Теоремы 3, определения скалярного произведения и обращаемости в нуль определителя матрицы, элементы двух строк у которой совпадают [3, с.133–134].

Замечание 2. Отметим, что эта теорема связана и с определением условий сохранения $u(x(t);t)$ в случайных средах [5; 6, с. 52].

Замечание 3. Из определения B_k следует, что число независимых строк в матрицах B_k не может превышать $(n-1)$. Следовательно, и число независимых первых интегралов $u_l(x;t)$ как неслучайных функций, связанных с уравнением Ито (1), не может превышать $(n-1)$.

Замечание 4. Для автономной системы $a_{1,0} = \frac{\partial}{\partial t} u(x;t) = 0$. Поэтому необходимо перейти от матрицы $A(t;x)$ к матрице, у которой будут отсутствовать первый столбец и последняя строка матрицы $A(t;x)$.

О расширении системы СДУ на основе требования существования первых интегралов

Рассмотрим теперь вопрос о возможности дополнения (1) системой стохастических уравнений

$$dx^o{}_l(t) = a^o{}_l(x(t);x^o(t);t)dt + \\ +b^o{}_{l,k}(x(t);x^0(t);t)dw_k(t), l=\overline{1,n_0} \tag{10}$$

таким образом, чтобы полный стохастический дифференциал функции $u(t,x(t),x^0(t))$ был равен нулю:

$$du(x(t);x^o(t);t) = 0.$$

По-прежнему будем полагать, что выполнены условия L, но уже в расширенном пространстве и, соответственно, области $D(n+n^o)$, $\forall t \in [0,T)$. В этом случае выводы Теоремы 1 приводят к равенствам, которые мы представим в таком виде:

$$\text{a)} b^o{}_{l,k}(x;x^o;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x^o{}_l} = -b_{i,k}(x;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_i}, \ \forall k = \overline{1,m}.$$

$$\begin{aligned} &\text{b)} -a^o{}_l(x;x^o,t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_l} = \frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial t} + \\ &+a_i(x;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}[b_{j,k}(x;t)b_{i,k}(x;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+b^o{}_{l,k}(x;x^o;t)b^o{}_{r,k}(x;x^o;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_l \partial x_r} + \\ &+b^o{}_{l,k}(x;x^o;t)b_{i,k}(x;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_l \partial x_i}]=f(x;x^o;t), \\ &i,j=\overline{1,n};\ l,r=\overline{1,n^o}; \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 4. Класс уравнений (1), (10), согласованный с требованием (11), не пуст.

Доказательство. Действительно, в области, где для фиксированного $l, \frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x^o_l} \neq 0$ ненулевые коэффициенты $b^o{}_{l,k}(x;x^o;t)$ могут быть выбраны для фиксированного l из равенства (11a):

$$b^o{}_{l,k}(x;x^o;t) = -\frac{1}{\tilde{n}_1}b_{i,k}(x;t)\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x^o{}_l}\right)^{-1},$$

где $\tilde{n}_1$ – число коэффициентов $b^o{}_{l,k}(x;x^o;t) \neq 0$.

Подставив полученные выражения $b^o{}_{l,k}(x;x^o;t)$ в равенство b), находим и $a_l(x;x^o;t)$:

$$a_l(x;x^o;t) = \frac{1}{\tilde{n}_2}f(x;x^o;t)\left(\frac{\partial u(x;x^o;t)}{\partial x^o{}_l}\right)^{-1},$$

$\tilde{n}_2$ – количество коэффициентов $a_l(x;x^o;t) \uparrow 0$.

Замечание 4. Систему (1), (10) можно интерпретировать как модель двухуровневой иерархической системы.

Пример построения расширенной системы

Пусть $x(t) \in \mathbb{R}^2$ – решение системы (1). Предположим, что выполнены ограничения L как для (1), так и ее расширения (1), (10).

Поскольку в силу Теоремы 4 нет ограничений на размерность расширения, ограничимся примером построения СДУ (10) для дополнительной переменной $x^o(t) \in \mathbb{R}$ таким образом, чтобы в расширенном пространстве $\mathbb{R}^3$ существовал первый интеграл $u(x;x^o)$:

$$du(x(t);x^o(t)) = 0 \tag{12}$$

Т.к. $x(t) \in \mathbb{R}^2$, то существует класс СДУ (1), допускающих существование только единственного первого интеграла (Замечание 3). Выберем первый интеграл следующего вида (диффузия на кольцах):

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2 \tag{13}$$

Перейдем к построению коэффициентов (1) с учетом ограничения (13).

В силу (13) $\frac{\partial}{\partial t}u(x)=0,\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,x^o)=0,$ то, учитывая Замечание 4 к Теореме 3, коэффициенты в уравнении (1) будут определяться равенствами:

$$\begin{aligned} b_k(x;t) &= \left\{q_{0,k}(x;t)\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\right\} = \\ &= q_{0,k}(x;t)(e_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - e_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} a(x;t) &= \left\{\begin{aligned} &q(x;t)\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\end{bmatrix} + \\ &+\frac{1}{2}(b_k(x;t),\nabla_x)b_k(x;t)\end{aligned}\right\} = \\ &= q(x;t)(e_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - e_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}) + \\ &+q_{0,k}(x;t)\frac{1}{2}(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2})\times \\ &\times[q_{0,k}(x;t)(e_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - e_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1})] \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим несколько вариантов представления коэффициентов из этого класса.

1. Пусть $k=1,\ q_{0,k}(x;t)=0,5$. Как следует из формул (14), (15), это соответствует системе:

$$
\begin{aligned}
& dx_1(t)=[q(x(t);t)2x_2(t)-0,5x_1(t)] \\
& dt+x_2(t)dw(t), \\
& dx_2(t)=[-q(x(t);t)2x_1(t)-0,5x_2(t)] \\
& dt-x_1(t)dw(t), \\
& x(t;x(0))|_{t=0}=x(0),\ x_1(t)|_{t=0}= \\
& =x_1(0)|_{t=0},\ x_2(t)=x_2(0).
\end{aligned}
$$

Если $q(x,t)=0$, то тогда:

$$
\begin{aligned}
& dx_1(t)=-0,5x_1(t)dt+x_2(t)dw(t), \\
& dx_2(t)=-0,5x_2(t)dt-x_1(t)dw(t).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Дальше будем рассматривать эту систему. Это линейная система, ее решение можно найти в явном виде:

$$x(t)=\exp\{w(t)B\}x(0)\text{ , где } B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Т.к. $B^2=-E$, где E – единичная матрица, то решение приводится к виду: $x(t)=[\cos w(t)+B\sin w(t)]x(0)$. Покомпонентная запись этого представления имеет вид:

$$
\begin{aligned}
& x_1(t)=[x_1(0)\cos w(t)+x_2(0)\sin w(t)], \\
& x_2(t)=[x_2(0)\cos w(t)-x_1(0)\sin w(t)].
\end{aligned} \tag{17}
$$

Опираясь на (17), проверяем, что $u(x(t))=(x(t),x(t))=(x(0),x(0))$ – первый интеграл для (16).

2. Перейдем к расширению (16) до системы вида (1), (10), у которой должен существовать первый интеграл $u(x;x^o)$ в $\mathbb{R}^3$.

Расширенная система (1), (10) в данном случае имеет вид:

$$
\begin{cases}
dx_1(t)=-0,5x_1(t)dt+x_2(t)dw(t), \\
dx_2(t)=-0,5x_2(t)dt-x_1(t)dw(t), \\
dx^o(t)=a^o(x(t);x^o(t))dt+b^o(x(t);x^o(t))dw(t)
\end{cases} \tag{18}
$$

$$x^o(t;x(0);x^o(0))|_{t=0}=x^o(0),\quad x(t;x(0))|_{t=0}=x(0).$$

Условие (12) для расширенной системы приводит при заданных выше предположениях с привлечением выводов Теоремы 4 к равенствам:

$$x_2\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x_2}=-b^o(x;x^o)\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x^o}. \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}[\,x_2\frac{\partial}{\partial x_1}b^o(x;x^o)-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}b^o(x;x^o)]\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x^o}+ \\
& -\frac{1}{2}b^o(x;x^o)\frac{\partial}{\partial x^o}b^o(x;x^o)\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x^o}= \\
& =-a^o(x;x^o)\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x^o}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Из (19), (20) следует, что

$$b^o(x;x^o)=-[x_2\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x_2}][\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x^o}]^{-1} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
a^o(x;x^o)=\frac{1}{2}[\,x_2\frac{\partial}{\partial x_1}b^o(x;x^o)-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}b^o(x;x^o)]+ \\
+\frac{1}{2}b^o(x;x^o)\frac{\partial}{\partial x^o}b^o(x;x^o)
\end{aligned} \tag{22}
$$

Как видим, $a^o(x;x^o)$ зависит от вида $b^o(x;x^o)$. Но $b^o(x;x^o)$ зависит от постулируемого вида первого интеграла $u(x;x^o)$. Выбирая, например, $u(x;x^o)=x_1x_2+x^o$, и подставив эту функцию в (21), (22), находим: $b^o(x;x^o)=-[x_2^2-x_1^2]$, $a^o(x;x^o)=-\frac{3}{2}[x_2^2-x_1^2]$.

Следовательно, с такими коэффициентами расширенная система (10) обладает первыми интегралами $u(x)=x_1^2+x_2^2$, и $u(x;x^o)=x_1x_2+x^o$.

3. В данном примере появляется возможность выяснить, будет ли существовать и какой будет иметь вид первый интеграл расширенной системы, если $b^o(x;x^o)$ задано. Например, выберем

$$b^o(x;x^o)=b^o=const\,. \tag{23}$$

Тогда в силу (22),

$$a^o(x;x^o)=0\,. \tag{24}$$

Остается только требование (21):

$$
\begin{aligned}
& x_2\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x_2}+ \\
& +b^o\frac{\partial u(x;x^o)}{\partial x^o}=0
\end{aligned}
$$

Решение этого уравнения, явно зависящее от $x,\ x^o$, может быть представлено в таком виде:

$$c+x^o-b^o\operatorname{arc\,ctg}\frac{x_2}{x_1}=u(x;x^o), \tag{25}$$

где c – постоянная.

Проверить, является ли функция $u(x;x^o)$ первым интегралом для (18) с коэффициентами (23), (24), можно и непосредственно, подставив решения (17) и $x^o(t)=x^o(0)+b_0w(t)$ (т.к. в (18) $dx^o(t)=b^o dw(t)$) в (25) и выполнив необходимые тригонометрические преобразования.

Заключение. Требование обеспечения устойчивости определенных показателей системы – одна из задач управления. Приведенные Теоремы о классе СДУ, допускающие существование первых интегралов, можно рассматривать как основу выбора управляющих элементов для динамической системы, позволяющих с вероятностью единицы сохранить требуемые показатели при сильных возмущениях. Доказанные в работе Теоремы указывают и на наличие резерва, вариативности в выборе таких управлений.

Список литературы:

1. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. Киев: Наук. думка, 1982. 612 с.
2. Дубко В.А. Первый интеграл системы стохастических уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. 22 с.
3. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989. 185 с.
4. Дубко В.А. В поисках скрытого порядка / В.А. Дубко, Ф.Н. Рянский, Э.М. Сороко, В.Н. Шалпо, В.В. Юшманов. Владивосток: Дальнаука, 1995. 118 с.
5. Дубко В.А. Интегральные инварианты уравнений Ито и их связь с некоторыми задачами теории случайных процессов. Док. НАН Украины, 2002, № 1. С. 24–29.
6. Дубко В.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Избранные разделы. Киев, 2012. 67 с.
7. Карачанская Е.В. Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями. Вестник Тихоокеанского государственного университета. № 2(21). 2011. С. 51–60.

ПЕРШІ ІНТЕГРАЛИ РІВНЯНЬ ІТО З ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА РОЗШИРЕНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІТО

У статті розглядається алгоритм побудови класу рівнянь Іто, що узгоджуються із заданим першим інтегралом, коли коефіцієнти рівнянь залежать від неконтрольованих збурень. Доводиться, що початкову систему рівнянь Іто можна доповнити, після чого розширена система може мати перший інтеграл, що залежить від початкових та нових змінних. Розглянуті приклади.

Ключові слова: *перший інтеграл, інваріантність, рівняння Іто, керування, розширені системи.*

THE FIRST INTEGRALS OF THE ITO EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS AND OF THE EXTENDED SYSTEM OF ITO EQUATIONS

In this paper we consider the algorithm for constructing the class of Ito equations that adapted with the given first integral, but with coefficients that depending on uncontrolled perturbations. It is proved that the initial system of Ito equations can be supplemented, after which the extended system can have the first integral of the initials and new variables. Examples are considered.

Key words*: first integrals, invariance, Ito equations, management, extended systems.*