ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА ЕРГОНОМІКА

УДК 514.74

Бадаев Ю.И.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

Ганношина И.Н.
Национальный транспортный университет

Лагодина Л.П.
Национальный транспортный университет

СЕГМЕНТ РАЦИОНАЛЬНОЙ КРИВОЙ БЕЗЬЕ 5-Й СТЕПЕНИ С ЗАДАННЫМИ КРИВИЗНАМИ НА КОНЦАХ СЕГМЕНТА

Предлагается моделирование криволинейного обвода сегментами рациональных криых Безье 5-й степени по заданному точечному каркасу с заданными в них кривизнами и с обеспечением непрерывности кривизны вдоль обвода.

Ключевые слова: *полиномиальный сегмент, сегмент рациональной кривой Безье 5-й степени, кривизна, первая и вторая производные, непрерывность кривизны.*

Постановка проблемы. В проектировании обводов машин и агрегатов, которые работают в движущейся среде (самолеты, автомобили, суда и др.) необходимо задание обвода с заданным законом изменения кривизны. Это требование имеет важное значение в конструкторских бюро, которые занимаются проектированием транспортных средств. Необходимо иметь аналитический аппарат решения этой задачи.

Анализ последних исследований и публикаций. В работах [3–5] предлагаются интерактивные способы проектирования обводов с заданной формой и кривизной с помощью специальной компьютерной программы. Однако такой подход не дает возможности предвидеть результаты в начале проектирования.

Постановка задачи. Вывод формулы рациональной кривой Безье по заданным двум точкам и величинам кривизны в них. Методами являются аналитические методы в геометрии. В результате получены формулы рациональной кривой Безье 5-й степени, которая проходит через две заданные точки и имеет в этих точках заданные величины кривизны, что дает возможность проектировать криволинейные обводы по заданным графикам изменения кривизны.

Изложение основного материала исследования. Будем моделировать кривую, которая строится из состыкованных сегментов кривых рациональной кривой Безье 5-й степени, заданных двумя точками и кривизнами в них.

Как известно из [1; 2] кривизна на плоскости в заданной точке r_i задается формулой:

$$k = \frac{y''_{xx}}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Если плоская кривая задана в векторно-параметрическом виде

$$r = r(t), \tag{2}$$

то кривизна рассчитывается по формуле:

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} x''_{tt} & y''_{tt} \\ x'_t & y'_t \end{vmatrix}^2}{(x'^2_t + y'^2_t)^3}, \tag{3}$$

Для пространственной кривой (2) будет задана кривизна:

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} x''_{tt} & y''_{tt} \\ x'_t & y'_t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y''_{tt} & z''_{tt} \\ y'_t & z'_t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z''_{tt} & x''_{tt} \\ z'_t & x'_t \end{vmatrix}^2}{(x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t)^3}. \quad (4)$$

Учитывая, что в формулах (3) и (4) в числителе задается квадрат векторного произведения векторов r_t'' и r_t', то эти формулы можно переписать в следующем виде:

$$k^2 = \frac{(|r_{tt}''||r_t'|\sin 90^0)^2}{|r_t'|^6} = \frac{|r_{tt}''|^2|r_t'|^2}{|r_t'|^6} = \frac{|r_{tt}''|^2}{|r_t'|^4}. \quad (5)$$

Отсюда получаем результат:

$$k = \frac{|r_{tt}''|}{|r_t'|^2}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для задания в заданной точке величины кривизны k необходимо вначале задать модуль первой производной $|r'|$ и из (6) определить и задать необходимый модуль второй производной $|r''|$.

Векторно-параметрическая рациональная кривая Безье 5-й степени задается формулой [2]:

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i r_i w_i t^i (1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i w_i t^i (1-t)^{(n-i)}}, \quad (7)$$

где $a_i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ $n = 5$.

Перестроим (7) в виде:

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^{5} A_i (r_i w_i) t^i}{\sum_{i=0}^{5} W_i t^i}, \quad (8)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= r_0 w_0 \\
A_1 &= 5(r_1 w_1 - r_0 w_0) \\
A_2 &= 10(r_0 w_0 - 2 r_1 w_1 + r_2 w_2) \\
A_3 &= 10(r_3 w_3 + 3 r_1 w_1 - r_0 w_0 - 3 r_2 w_2) \\
A_4 &= 5(r_0 w_0 - 4 r_1 w_1 + 6 r_2 w_2 - 4 r_3 w_3 + r_4 w_4) \\
A_5 &= (-r_0 w_0 + 5 r_1 w_1 - 10 r_2 w_2 + 10 r_3 w_3 - 5 r_4 w_4 + r_5 w_5)
\end{aligned}\right\} \quad (8.0\text{-}8.5)$$

Аналогично будут определены и W_i, однако, вместо $r_i w_i$ будут только веса W_i:

$$\left.\begin{aligned}
W_0 &= w_0 \\
W_1 &= 5(w_1 - w_0) \\
W_2 &= 10(w_0 - 2w_1 + w_2) \\
W_3 &= 10(w_3 + 3w_1 - 3w_2 - w_0) \\
W_4 &= 5(w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4) \\
W_5 &= (-w_0 + 5w_1 - 10w_2 + 10w_3 - 5w_4 + w_5)
\end{aligned}\right\} \quad (8.6\text{-}8.11)$$

Пусть заданы точки r_0 и r_5 а также производные r_0' и r_5' и кривизны в них k_0 и k_5.

В формуле (8) примем:

Тогда

$$r(t) = \frac{A(t)}{B(t)}. \quad (9)$$

Рассчитаем первую производную:

$$r'(t) = \frac{A'(t)B(t) - A(t)B'(t)}{B^2(t)}. \quad (10)$$

В точке 0(t=0) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
A(t) &= r_0 w_0 \\
A'(t) &= 5(r_1 w_1 - r_0 w_0) \\
B(t) &= w_0 \\
B'(t) &= 5(w_1 - w_0).
\end{aligned}\right\} \quad (10.0\text{-}10.3)$$

Подставив в (10), получим:

$$r_t'(0) = 5(r_1 - r_0)\frac{w_1}{w_0}, \quad (11)$$

$$r_x'(0) = \frac{y_t'(t)}{x_t'(t)} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}. \quad (12)$$

Отсюда

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) r_x'(0). \quad (13)$$

Для окончательного решения поставленной задачи осталось рассчитать вторую производную от (8).

Возьмем производную от (10). Получим в виде:

$$r_{tt}''(t) = \frac{[A''(t)B(t) - A'(t)B'(t) - A'(t)B'(t) - A(t)B''(t)]B^2(t) -}{B^4(t)}. \quad (13)$$

$$\frac{-[A'(t)B(t) - A(t)B'(t)]2B(t)B'(t)}{B^4(t)}$$

В точке 0(t=0) будут следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned}
A(0) &= r_0 w_0 \\
A'(0) &= 5(r_1 w_1 - r_0 w_0) \\
A''(0) &= 20(r_0 w_0 - 2 r_1 w_1 + r_2 w_2) \\
B(0) &= w_0 \\
B'(0) &= 5(w_1 - w_0) \\
B''(0) &= 20(w_0 - 2w_1 + w_2)
\end{aligned}\right\}. \quad (15)$$

Подставив в (13), будем иметь:

$$r_{tt}''(0) = 20\frac{2w_1(r_0 - r_1) + w_2(r_2 - r_0)}{} - 50\frac{w_1(r_1 - r_0)(w_1 - w_0)}{w_0^2}. \quad (16)$$

Анализируя формулу (16), можно видеть, что если задаться значениями r_0, r_1, w_0, w_1 и w_2, можно найти точку r_2.

Точка r0 задается по условию задачи.

Точка r1 определится из задания первой производной:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) r_x'(0).$$

Удобно принять $w_1 = w_0 = 1.0$. Тогда (16) упростится:

$$r_{tt}''(0) = 20\frac{2w_1(r_0 - r_1) + w_2(r_2 - r_0)}{w_2} \quad (17)$$

Отсюда при заданных r_0, r_1, w_2 и $r_{tt}''(0)$ легко находится r_2:

$$r_2 = \frac{\dfrac{r_{tt}''(0)}{20} w_2 - 2(r_0 - r_1) + r_0 w_2}{w_2}. \quad (18)$$

Если задать r_0, r_1, r_2 и $r_{tt}''(0)$, то можно определить w_2:

$$w_2 = \frac{-2(r_0 - r_1)}{(r_2 - r_0) - \dfrac{r_{tt}''(0)}{20}}. \quad (19)$$

Используем симметрию (7).

Если заменить параметр t на t=1-u то 1-t=u , и подставив в (7), получим формулу, симметричную к (7) в том смысле, что точки 3, 4, 5 и 2, 1, 0 поменяются соответственно местами. А также, поскольку имеем формулы

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{dt}\\&\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2r}{du^2}\frac{du}{dt}+\frac{dr}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\\&\frac{du}{dt}=-1,\ \frac{d^2u}{dt^2}=0\end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

то вышеуказанные формулы (13), (18) и (19) при t=1 перепишутся в виде:

$$y_4=y_5-(x_4-x_5)r_x'(1), \tag{21}$$

$$r_3=\frac{\frac{r_{tt}''(1)}{20}w_3-2(r_0-r_1)+r_5w_3}{w_3}, \tag{22}$$

$$w_3=\frac{-2(r_5-r_4)}{(r_3-r_5)-\frac{r_{tt}''(1)}{20}}. \tag{23}$$

Тогда на основании формул (11), (17), (18) можно записать в точке 5 (t=5):

$$r_t'(0)=5(r_1-r_0)\frac{w_1}{w_0}, \tag{24}$$

$$r_x'(1)=\frac{y_t'(1)}{x_t'(1)}=\frac{(y_4-y_5)}{(x_4-x_5)}, \tag{25}$$

$$r_{tt}''(1)=-20\frac{2w_4(r_5-r_4)+w_3(r_3-r_5)}{w_3}. \tag{26}$$

Если принять $w_5=w_4=1$, то при заданных r_4 , r_5 w_3 и $r_{tt}''(1)$ получим:

$$r_3=\frac{-\frac{r_{tt}''(1)}{20}w_3-2(r_5-r_4)+r_5w_3}{w_3}. \tag{27}$$

При заданных r_5, r_4, r_3 и $r_{tt}''(1)$ будем иметь:

$$w_3=\frac{-2(r_5-r_4)}{(r_3-r_5)+\frac{r_{tt}''(1)}{20}}. \tag{28}$$

Таким образом, задавшись координатами двух точек и величинами кривизн в этих точках, можно построить сегмент рациональной кривой Безье 5-й степени, которая проходит через эти точки и обеспечивает значения заданных кривизн в этих точках. Однако этот вывод оказывается неверен в том смысле, что полученные формулы не обеспечивают получение цельной кривой Безье в виде формулы (7). Это происходит потому, что формулы (16), (17) и (20), (21) оперируют векторами, которые в разложениях покоординатно дают разные результаты. Так, например, имея значения x'', y'', z'', что в совокупности дают вектор r'', и, применяя формулы (17) и (21) отдельно по каждой координате x, y и z, получим различные значения весов точек r_2 и r_3 (т.е. w_2 и w_3) для различных координат. В связи с этим имеет смысл применять кривую Безье, которую можно назвать «рациональная координатно-разделенная кривая Безье», в формуле которой веса точек разделены по координатам: w_{ix} ,w_{iy} ,w_{iz} .В этом случае рациональную кривую Безье (7) нужно рассматривать по каждой координате отдельно:

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_ix_iw_{ix}t^i(1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^{n}a_iw_{ix}t^i(1-t)^{(n-i)}}\\&y(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_iy_iw_{iy}t^i(1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^{n}a_iw_{iy}t^i(1-t)^{(n-i)}}\\&z(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_iz_iw_{iz}t^i(1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^{n}a_iw_{iz}t^i(1-t)^{(n-i)}}.\end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

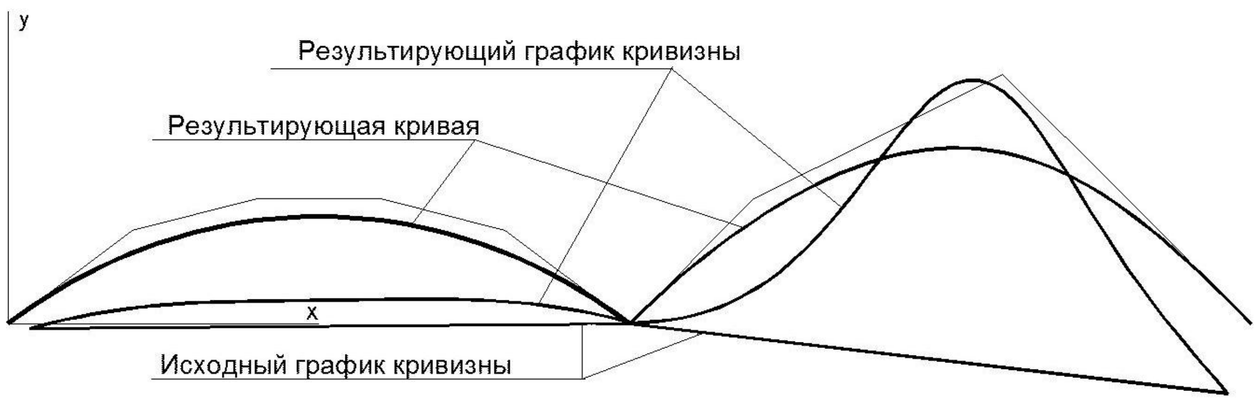

Рис. 1. Проектирование кривой по заданному графику кривизны

По окончании исследований была разработана компьютерная программа. Результаты ее работы представлены на рис.1. В качестве исходных данных были взяты три точки: 0(x=0, y=0), 1(x=50, y =0),2 (x=100, y=0) и заданы в них кривизны (k_0=-0.38, k_1=0, k_2=-5.6), то есть график желаемой кривизны представлен в виде ломаной 0-1-2 (см. рис.1). На рис.1 видно, что результирующая кривая представлена в виде двух состыкованных сегментов рациональных кривых Безье. Результирующий график кривизны также определился в виде двух сегментов кривых.

Вывод. Полученные результаты дают возможность интерполировать точечно-заданную кривую с заданными в них кривизнами криволинейным обводом из сегментов рациональных кривых Безье 5-й степени. Дальнейшие исследования предполагается вести в направлении оптимизации формы кривой.

Список литературы:

1. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: Издательство «Наука», 1971. 576 с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Физматгиз, 2002. 472 с.
3. Бадаєв Ю.І., Блиндарук А.О. Керування кривиною NURBS кривої 3-го порядку за допомогою ваги контрольних вектор-точок. Водний транспорт. 2014. Вип. 3(21). С. 103.
4. Бадаєв Ю.І. Блиндарук А.О. Компютерна реалізація проектування криволінійних обводів проектування криволінійних обводів методом NURBS – технологій вищих порядків. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць МДПУ. 2014. С. 3– 6.
5. Бадаєв Ю.І., Блиндарук А.О. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS – кривої. Современные информационные и электронные технологии: труды XV международн. науч.-практ. конф. Одесса, 2014. Т. 1. С. 26–27.

СЕГМЕНТ РАЦИОНАЛЬНОЇ КРИВОЇ БЕЗЬЄ 5-ГО СТЕПЕНЯ ІЗ ЗАДАНИМИ КРИВИЗНАМИ НА КІНЦЯХ СЕГМЕНТУ

Пропонується моделювання криволінійного обводу сегментами раціональних кривих Безьє 5-го степеня за заданим точковим каркасом із заданими в них кривизнами і з забезпеченням безперервності кривизни уздовж обводу.

Ключові слова: *поліноміальний сегмент, сегмент раціональної кривої Безьє 5-го ступеня, кривизна, перша і друга похідні, безперервність кривизни.*

SEGMENT OF THE RATIONAL CURVE OF THE BINDER OF THE 5th DEGREE FROM THE STATED CURVATES AT THE END OF THE SEGMENT

It is proposed to simulate the curvilinear contour by segments of rational Bézier curves of the 5th degree from a given point skeleton with the curvatures given in them and with the continuity of the curvature along the contour.

Key words: *polynomial segment, segment of the rational Bézier curve of degree 5, curvature, first and second derivatives, continuity of curvature.*