УДК 515.2:528.71

Реута О.В.
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Хабраман Хаді
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПОБУДОВА 3D-ВЕЙВЛЕТІВ ХААРА ДЛЯ ЗАДАЧ АНАЛІЗУ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТОРОВИХ ФОРМ

У роботі розглянуто процес формування вейвлетів довільної розмірності та запропоновано його геометричну інтерпретацію для розмірностей 1, 2 та 3. Наведено геометричні форми масштабної функції та вейвлетів перетворення Хаара для розмірностей 1, 2 та 3. Отримано аналітичні вирази для просторових вейвлетів Хаара з метою їх опису за довільними параметрами перенесення і масштабування.
Ключові слова: *просторова форма, розмірність, воксельна модель, вейвлет-перетворення, вейвлет-коефіцієнти, тривимірний вейвлет Хаара, кратно-масштабний аналіз.*

Постановка проблеми. Вейвлети є популярним засобом аналізу форми об'єктів. Зокрема, коли форма подана дискретною моделлю: гістограмою для одновимірного об'єкту, матрицею – для двовимірного, і вексельною – для просторового тіла. Аналіз форми останнього із застосуванням вейвлетів ефективно може бути здійснений лише за наявності вейвлетів відповідної розмірності. Однак проблемою є те, що натепер відсутні аналітичні вирази для вейвлетів конкретних типів розмірності більшої за 1, навіть для випадків їх найпростішої форми. У роботі пропонується узагальнення вейвлетів Хаара для випадку трьох розмірностей, дається геометрична інтерпретація процесу їх утворення і наводиться процедура їх визначення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вейлет-перетворення одно – і двовимірних функцій широко застосовується в науці і техніці для аналізу й оброблення сигналів, що подають об'єкти і процеси реального світу. Водночас, незважаючи на розмірність функції, що перетворюється, вейвлет-перетворення завжди одновимірне, а змінюється лише спосіб його застосування. Так, наприклад, у разі перетворення Хаара, яке є предметом розгляду нашої роботи, коли функція подана двовимірним масивом своїх значень, спочатку перетворення здійснюється вздовж однієї розмірності (наприклад, над рядками). потім – уздовж другої (над стовпцями) [1, с. 281]. Кожного разу об'єктом перетворення є одновимірний масив. Розширення цього підходу на перетворення просторових форм (тривимірних або просторових об'єктів) лише додає ще один крок перетворення, залишаючи незмінним як вигляд самого перетворення, так і використаний для цього вейвлет [2, с. 391]. Між тим, вейвлети довільної розмірності описані як у загальному вигляді [3, с. 79; 4, с. 500], так і більш конкретно – для випадку трьох розмірностей [5, с. 309]. Це дає можливість констатувати, що натепер уже існує достатньо розвинений математичний апарат, який дозволяє розглянути вейвлет-перетворення просторової форми, не зменшуючи розмірність задачі під час її розв'язання.

Постановка завдання. Мета роботи – описати процес побудови просторового вейвлету Хаара, дати геометричну інтерпретацію й отримати відповідні аналітичні вирази для масштабної функції й власне вейвлету.

Виклад основного матеріалу дослідження. Просторова форма може бути ефективно подана своєю дискретною моделлю (далі – ДМ), побудованою на основі просторових елементів – векселів [7, с. 501]. Її аналіз за допомогою вейвлетів визначений кратно-масштабним аналізом (далі – КМА), що здійснюється, як правило, за схемою [2, с. 393], названою пірамідальною [1, с. 218], у якій застосовуються одновимірні вейвлети послідовно для кожної розмірності (рис. 1).

Розв'язання поставленого завдання почнемо з того, що розглянемо узагальнення вейвлетів для довільної розмірності.

Нехай функція $\psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots x_n)$ – n-вимірний вейвлет, що означає виконання для неї таких умов [6, с.10]:

$$\psi(\mathbf{x})\in L^2\left(R^n\right) \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0. \qquad (1)$$

Тоді вейвлет-перетворення довільної функції $f(\mathbf{x})\in L^2\left(R^n\right)$ матиме вигляд:

$$Wf(\mathbf{x})=\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\,\psi\left(\frac{\mathbf{b}-\mathbf{x}}{\mathbf{a}}\right)d\mathbf{x}. \qquad (2)$$

Вейвлети виду $\mathbf{\Psi}=\left\{\psi_{m,k}(\mathbf{x})=2^{m/2}\psi\left(2^{m/2}\mathbf{x}-\mathbf{k}\right)\right\}$ для фіксованого m є базисом підпростору $W_m=V_m \setminus V_{m-1}$ $(m=0,\pm 1,\dots)$ в ортогональному КМА форми, визначеної за допомогою $f(\mathbf{x})$ [6, с. 130].

Безпосередній шлях побудови n-вимірного ортонормального базису, виходячи з одновимірного ортонормального вейвлет-базису Ψ, полягає в застосуванні тензорного добутку для утворення відповідної функції з n-одновимірних базисів (мається на увазі й інша можливість, зазначена в [4, с. 500]):

$$\Psi_{j_1k_1j_2k_2\dots j_nk_n}(x_1, x_2, \dots x_n)=\psi_{j_1k_1}(x_1)\otimes \psi_{j_2k_2}(x_2)\otimes\dots\otimes\psi_{j_nk_n}(x_n), \qquad (3)$$

де ⊗– операція тензорного добутку.

У цьому базисі всі складники x_i, $i=\overline{1,n}$ змінюються по різному. Між тим, практичне значення для аналізу форм просторових об'єктів або їх дискретних моделей (і найбільший інтерес) має конструкція, у якій масштабування отриманого ортонормованого вейвлет-базису здійснюється за всіма змінними однаково.

У цьому разі n-вимірні вейвлети задаються такими виразами:

$$\Psi_{jk_1k_2\dots k_n}(x_1, x_2, \dots x_n)=2^j\psi\left(2^j x_1-k_1, 2^j x_2-k_2, \dots 2^j x_n-k_n\right). \quad (4)$$

У цьому базисі всі складники x_i, $i=\overline{1,n}$ змінюються по різному. Між тим, практичне значення для аналізу форм просторових об'єктів або їх дискретних моделей (і найбільший інтерес) має конструкція, у якій масштабування отриманого ортонормованого вейвлет-базису здійснюється за всіма змінними однаково.

У цьому разі n-вимірні вейвлети задаються такими виразами:

$$\Psi_{jk_1k_2\dots k_n}(x_1, x_2, \dots x_n)=2^j\psi\left(2^j x_1-k_1, 2^j x_2-k_2, \dots 2^j x_n-k_n\right). \quad (4)$$

Як відомо [4, с. 501], у загальному n-вимірному випадку існує $2^n - 1$ функцій, що утворюють ортонормальний базис і здійснюють КМА будь-якої функції з $L^2\left(R^n\right)$. Тому функція Ψ (4) вже не буде єдиною, а буде сформованою з $2^n - 1$ елементарних вейвлетів і для того щоб створити ортонормований базис, необхідно буде використати $2^n - 1$ сімейства.

Геометрична інтерпретація цього сімейства полягає в тому, що кількість елементарних вейвлетів $Nw = 2^n - 1$ визначає кількість напрямів аналізу моделі в просторі. Так, нехай t – параметр ($t \in Z$). Тоді в ортонормованому базисі $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ напрями аналізу моделі будуть визначатися такими виразами:

- випадок одновимірної ДМ (n = 1, Nw = 1):

$$\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{i}t;$$

- випадок двовимірної ДМ (n = 2, Nw = 3):

$$\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{i}t,\ \mathbf{r}_2(t)=\mathbf{j}t,\ \mathbf{r}_3(t)=(\mathbf{i}+\mathbf{j})t;$$

- випадок тривимірної ДМ (n = 3, Nw = 7):

$$\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{i}t,\quad \mathbf{r}_2(t)=\mathbf{j}t,\quad \mathbf{r}_3(t)=\mathbf{k}t,\quad \mathbf{r}_4(t)=(\mathbf{i}+\mathbf{j})t,$$
$$\mathbf{r}_5(t)=(\mathbf{j}+\mathbf{k})t,\ \mathbf{r}_6(t)=(\mathbf{k}+\mathbf{i})t,\ \mathbf{r}_7(t)=(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})t.$$

Визначимо аналітичні вирази елементів одного з найпоширеніших вейвлет-базисів – базиса Хаара [1, с. 232; 6, с. 10], масштабна функція якого φ і сам вейвлет Ψ визначаються так:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x\notin[0,1)\end{cases},\qquad \psi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1/2)\\ -1, & x\in[1/2,1)\\ 0, & x\notin[0,1)\end{cases}. \quad (5)$$

Скориставшись наведеним вище підходом конструювання вейвлетів довільної розмірності (3), можна отримати подання (5) для випадку 2D.

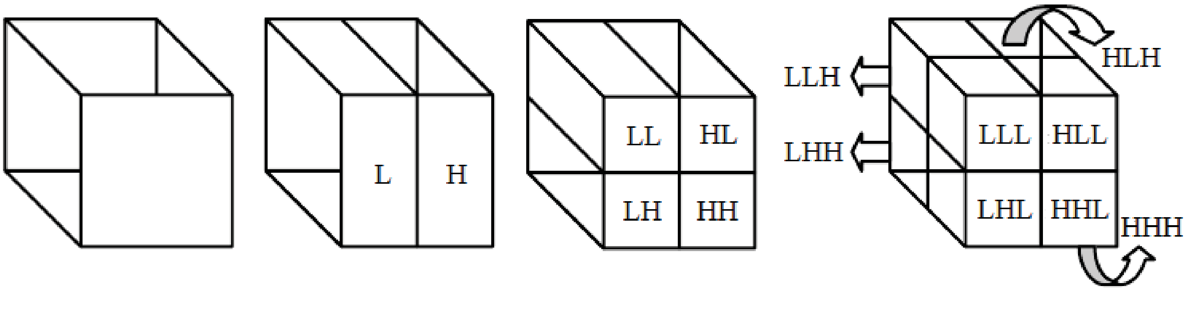


Рис. 1. Схема реалізації вейвлет-перетворення у разі тривимірної ДМ об'єкта із застосуванням одновимірних вейвлетів (L та H позначають межі низько- та високочастотних коефіцієнтів вейвлет-перетворення)

Відповідний вираз матиме такий вигляд:

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}1, & (x, y)\in Q\\ 0, & (x, y)\notin Q\end{cases},\qquad \psi(x, y)=\begin{cases}1, & (x, y)\in Q_1^+\vee Q_2^+\\ -1, & (x, y)\in Q_1^-\vee Q_2^-\\ 0, & (x, y)\notin Q\end{cases},\quad (6)$$

де Q – квадрат, з вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0); Q_1^+ – квадрат із вершинами (0, 0), (0, 1/2), (1/2, 1/2), (1/2, 0), Q_2^+ – квадрат із вершинами (1/2, 1/2), (1/2, 1), (1, 1), (1, 1/2), Q_1^- – квадрат із вершинами (0, 1/2), (1/2, 1/2), (1/2, 1), (0, 1), Q_2^- – квадрат із вершинами (1/2, 0), (1, 0), (1, 1/2), (1/2, 1/2).

Аналітичний вираз для 3D-вейвлетів Хаара має такий вигляд:

$$\varphi(x, y, z)=\begin{cases}1, & (x, y, z)\in C\\ 0, & (x, y, z)\notin C\end{cases}$$

$$\psi(x, y, z)=\begin{cases}1, & (x, y, z)\in C_1^+\vee C_2^+\vee C_3^+\vee C_4^+\\ -1, & (x, y, z)\in C_1^-\vee C_2^-\vee C_3^-\vee C_4^-\\ 0, & (x, y, z)\notin C\end{cases},\quad (7)$$

де C – куб із вершинами (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1); C_1^+ – куб із вершинами (0, 0, 0), (0, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 0), (0, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2); C_2^+ – куб із вершинами (1/2, 1/2, 0), (1/2, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1, 1/2), (1, 1, 1/2), (1, 1/2, 1/2), C_3^+ – куб із вершинами (0, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1, 1/2), (0, 1, 1/2), (0, 1/2, 1), (1/2, 1/2, 1), (1/2, 1, 1), (0, 1, 1); C_4^+ – куб із вершинами (1/2, 0, 1/2), (1, 0, 1/2), (1, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1/2, 1), (1/2, 1/2, 1); C_2^- – куб із вершинами (0, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 0), (1/2, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1, 1/2), (0, 1, 1/2); C_2^- – куб із вершинами (1/2, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2), (1, 0, 1/2), (1, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2); C_4^- – куб із вершинами (0, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2), (0, 0, 1), (0, 1/2, 1), (1/2, 1/2, 1), (1/2, 0, 1); C_4^- – куб із вершинами (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1, 1/2), (1, 1, 1/2), (1, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1), (1/2, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1/2, 1).

На рис. 2. наведені межі визначення функцій $\psi(x, y, z)$ і $\psi(x, y, z)$ (5) у вигляді кубів C (рис. 2, а), C+ (рис. 2, б) і C– (рис. 2, в).

Із рис. 2 видно, що кожна з областей C+ або C– (рис. 2 б, в) є октантом області C (рис. 2, а). (Зазначимо, що область C є носієм функцій (7), як це визначено в [1, с. 232]). Уведемо єдиний індекс *i*, $i=\overline{0,\ 7}$, для їх позначення (порядок вибору значень індексу і буде пояснено нижче):

$$C_1^+ = C_0,\ C_2^+ = C_6,\ C_3^+ = C_3,\ C_4^+ = C_5,$$

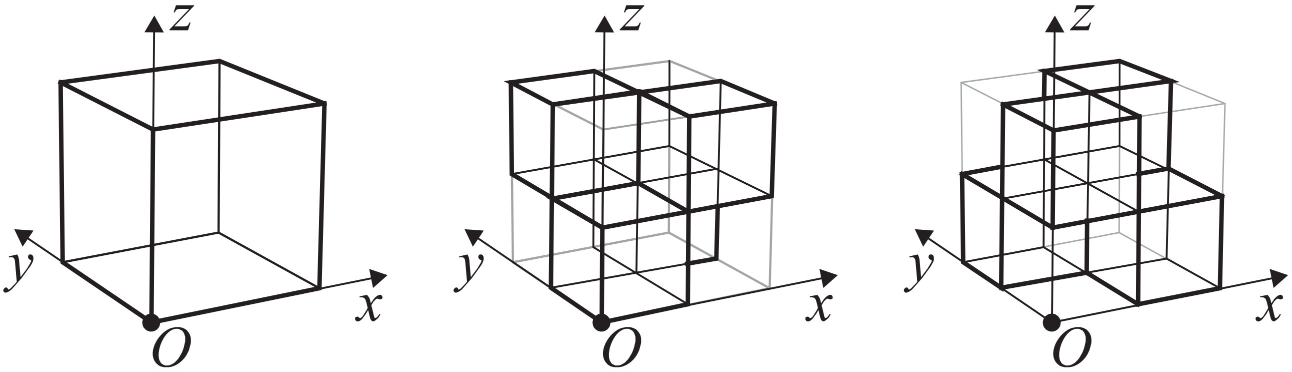
$$C_1^- = C_2,\ C_2^- = C_4,\ C_3^- = C_1,\ C_4^- = C_7.\quad (8)$$

Отримані результати стосуються рівня деталізації $L=1$. Тому далі розглянемо процес формування областей (8) у разі довільного рівня деталізації *L* подання форми просторового об'єкта.

Оберемо умову: тип області (C, C⁺ або C⁻), її розмір і положення мають повністю визначатися її індексом або індексами.

Спочатку встановимо зв'язок індекса і, що задає один октант із восьми, з геометричним положенням відповідної області і її типом. Для цього подамо індекс *i* у двійковій системі числення. Таке подання вимагатиме три двійкових розряди, кожен із яких умовно буде відповідати певній координаті, а всі разом визначатимуть центр області (октанта).

Уважатимемо, що двійкове подання індексу i – $b_i^2 b_i^1 b_i^0$, де b_i^p – значення *p*-го розряду цього подання. Установимо відповідність. Нехай b_i^2 відповідає аплікаті, b_i^1 – ординаті і b_i^0 – абсцисі (орієнтація осей задається ДМ, аналіз якої передбачається [7, с. 501]). Тоді тип області визначатиметься за кількістю одиничних розрядів у поданні $b_i^2 b_i^1 b_i^0$: якщо кількість одиничних розрядів парна ($b_i^2 \oplus b_i^1 \oplus b_i^0 = 0$, де $\oplus$ – операція виключаючого



а) б) в)

Рис 2. Куби C (а), C+ (б) і C– (в), що подають області визначення функцій *φ(x, y, z)* і *Ψ(x, y, z)* у виразі (3)

АБО), то індекс визначає область типу С⁺, інакше – типу С⁻. Наприклад, якщо i = 5, то, оскільки 5 = 101_2, маємо $b_5^2 = 1$ (визначає координату центру октанту вздовж осі Oz), $b_5^1 = 0$ (вздовж Oy) і $b_5^0 = 1$ (вздовж Ox), тип області – С⁻, де $\psi(x, y, z)$, згідно з (7), має значення –1.

Тому координати центру октанту C_i матимуть значення:

$$x_i = x_L^C + \left(-\frac{1}{2}b_i^0\right)\Delta_L^x,\ \ y_i = y_L^C + \left(-\frac{1}{2}b_i^1\right)\Delta_L^y,$$

$$z_i = z_L^C + \left(-\frac{1}{2}b_i^2\right)\Delta_L^z, \qquad (9)$$

де x_L^C, y_L^C, z_L^C – координати центру області С, одним з октантів якої є C_i, а Δ_L^x, Δ_L^y, Δ_L^z, – її лінійні розміри на рівні деталізації L, які, визначаються так:

$$\Delta_L^x = \frac{L_x}{2^L},\ \ \Delta_L^y = \frac{L_y}{2^L},\ \ \Delta_L^z = \frac{L_z}{2^L}. \qquad (10)$$

Якщо відомі координати центру (9) октанту C_i, то координати його вершин визначаються так:

$$\left(x_i \pm \frac{L_x}{2^{L+1}},\ y_i \pm \frac{L_y}{2^{L+1}},\ z_i \pm \frac{L_z}{2^{L+1}}\right). \qquad (11)$$

Для випадку $L > 1$, область С є октантом і координати її центру x_L^C, y_L^C, z_L^C також визначаються за (5) і тому залежать від положення всіх октантів, сформованих на попередніх рівнях деталізації 1, 2 … $L-1$, що містять область С.

Узагальнюючи вираз (9), на випадок довільного рівня деталізації, можна отримати координати центра будь-якого октанта (8) на будь-якому рівні деталізації, визначити аналітичний вираз 3D-вейвлета Хаара.

Для довільного $L > 1$ вирази (9) матимуть такий вигляд:

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_L} = x_{i_1 i_2 \ldots i_{L-1}} + \left(b_{i_L}^0 - \frac{1}{2}\right)\Delta_L^x = L_x\left[\frac{1}{4^L}\left(\sum_{q=1}^{L} b_q^0 + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}\right],$$

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_L} = y_{i_1 i_2 \ldots i_{L-1}} + \left(b_{i_L}^1 - \frac{1}{2}\right)\Delta_L^y = L_y\left[\frac{1}{4^L}\left(\sum_{q=1}^{L} b_q^1 + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}\right],$$

$$z_{i_1 i_2 \ldots i_L} = z_{i_1 i_2 \ldots i_{L-1}} + \left(b_{i_L}^2 - \frac{1}{2}\right)\Delta_L^z = L_z\left[\frac{1}{4^L}\left(\sum_{q=1}^{L} b_q^2 + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}\right]. \qquad (12)$$

Таким чином, у трьох розмірностях масштабна функція і вейвлет перетворення Хаара мають вигляд (7), де області С, залежно від рівня деталізації (параметру масштабування вейвлету), мають розмір (10) і, залежно від параметрів перенесення, положення центру (12). Форма вейвлету визначається також за його положенням (значенням індексу), як було описано вище.

Висновки. У результаті дослідження отримано аналітичні вирази для 3D-вейвлетів Хаара (7)–(12), що дає змогу ефективно використовувати їх для КМА форм просторових об'єктів, поданих своїми дискретними моделями, наприклад, воксельними. У подальшому передбачається розроблення процедури безпосередньо вейвлет-аналізу та її програмна реалізація.

Список літератури:

1. Сэломон. Д. Сжатие данных, изображения, звука. Москва: Техносфера, 2004. 368 с.
2. Pinnamaneni Pujita, Saladi Sagar, Meyer Joerg. 3-D Haar Wavelet Transformation and Texture-Based 3-D Reconstruction of Biomedical Data Sets // Visualization, Imaging and Image Processing (VIIP 2001), The International Association of Science and Technology for Development, Marbella, Spain, ACTA Press, 2001. P. 389–394.
3. Копенков В.Н. Эффективные алгоритмы локального дискретного вейвлет-преобразования с базисом Хаара. Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 1. С. 78–84.
4. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование. Успехи физических наук. 2001. Т. 171, № 5. С. 465–501.
5. Реута О.В. Використання перетворення Хаара при розпізнаванні просторових об'єктів на основі піраміди моделей. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2012. Вип. 89. С. 306–310.
6. I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Lecture Notes nr. 61, SIAM, 1992. 377 p.
7. Реута О.В. Вексельна модель тривимірного об'єка в задачах реконструкції його форми. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2008. Вип. 80. С. 500–504.

ПОСТРОЕНИЕ 3D-ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА ДЛЯ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ

В работе рассмотрен процесс формирования вейвлетов произвольной размерности и предложена его геометрическая интерпретация для размерностей 1, 2 и 3. Представлены геометрические формы масштабной функции и вейвлетов преобразования Хаара размерности 1, 2 и 3. Для пространственных вейвлетов Хаара получены аналитические выражения для их описания по произвольным параметрам переноса и масштабирования.

Ключевые слова: *пространственная форма, размерность, вексельная модель, вейвлет-преобразование, вейвлет-коэффициенты, трехмерный вейвлет Хаара, кратно-масштабный анализ.*

CONSTRUCTION OF 3D HAAR WAVELETS FOR ANALYSIS OF DISCRETE MODELS OF SPACE SHAPES

An approach to construction of wavelets of arbitrary dimension is considered and its geometric interpretation for 1D, 2D and 3D cases is proposed. The geometric forms of scaling function and wavelets of Haar transformation for 1D, 2D and 3D cases are presented. Analytical expressions for 3D Haar wavelets with arbitrary shift and scale parameters are obtained.

Key words: *space shape, dimension, voxel model, wavelet transformation, wavelet coefficients, 3D Haar wavelet, multi-dimensional analysis.*