УДК 656.21

СИНТЕЗ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПАРНЫМИ САТЕЛЛИТАМИ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

к.т.н. В.Т. Абрамов, О.Ю. Довгополая
(представил д.т.н., проф. В.Д. Жихарев)

В работе рассмотрены вопросы, связанные с синтезом планетарных механизмов с парными сателлитами простых схем с минимальной массой.

Проектирование механизмов выполняется на основании учета требований, обусловленных их назначением. Среди этих требований есть главные, которые относятся к эксплуатационной способности механизма (обеспечение диапазона передаточного отношения скорости исполнительного органа, прочности, надежности и т.п.) и дополнительные требования, указывающие на желательные особенности проектируемого механизма (малые габариты, вес, малая инерционность, высокий КПД и т.п.). Зачастую дополнительные требования выступают как основные при проектировании механизмов систем автоматического регулирования и систем управления летательными аппаратами, в которых механизмы должны обладать высокой надежностью, быстродействием и малой массой.

Наиболее эффективным средством решения поставленной задачи является применение планетарных механизмов, и, в частности, с парными сателлитами. Эти механизмы обладают компактностью и простотой решения задач сложения и разложения движений, что особенно важно для повышения надежности приводов. Большое разнообразие возможных типов планетарных передач с одним и тем же передаточным отношением и недостаточность сведений об их сравнительных характеристиках делают затруднительным выбор варианта механизма с оптимальными параметрами.

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с синтезом планетарных механизмов с парными сателлитами простых схем (рис. 1) с минимальной массой. При определении масс механизмов принимались следующие допущения: материал всех звеньев механизма одинаков; массы подшипников и валов не учитываются; масса подвижных колес считается равной массе диска, диаметр и ширина которого равны диаметру делительной окружности и ширине соответствующего колеса [1]; масса корпуса водила и неподвижного колеса принимается пропорциональной массе условного диска, диаметр которого равен межосевому расстоянию первой ступени механизма, а ширина равна ширине ведущего зубчатого колеса [1]. Масса каждого из планетарных механизмов, показанных на рис. 1, равна

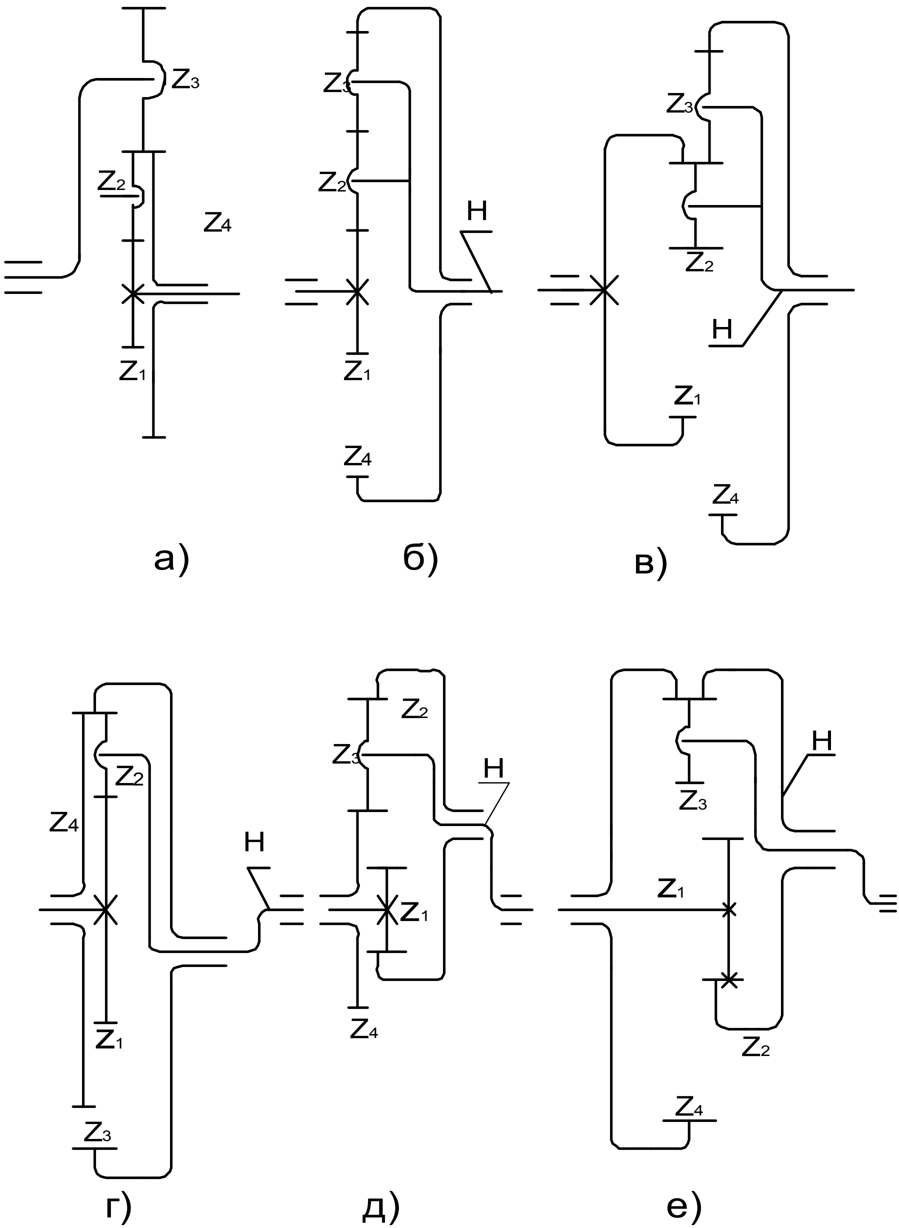

Рис. 1. Схемы планетарных механизмов с одновенцовыми сателлитами

$$\mathbf{M} = \mathbf{M_1} + \mathbf{k}(\mathbf{M_2} + \mathbf{M_3}) + \mathbf{n_M}\mathbf{M_A}, \qquad (1)$$

где **К** - число сателлитов (для схем, показанных на рис.1 г, д, е, **К = 1**); $\mathbf{n_M}$ - коэффициент приведения масс водила, корпуса и неподвижного колеса к массе условного диска [1]; $\mathbf{M_A}$ - масса условного диска.

Масса подвижных колес ($\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ и $\mathbf{M_3}$) определяется зависимостью

$$\mathbf{M_I} = \frac{\pi\rho}{4}\mathbf{b_i d_i^2}, \qquad (2)$$

а масса условного диска в зависимости от схемы механизма определяется по одной из следующих формул:

$$\mathbf{M_A} = \frac{\pi\rho}{4}\mathbf{b_1(d_1 + d_2)^2} \qquad (3)$$

для схем а), б), г) (рис.1);

$$\mathbf{M_A} = \frac{\pi\rho}{4}\cdot\mathbf{b_i}\cdot(\mathbf{d_1} - \mathbf{d_2})^2 \qquad (4)$$

для схем в);

$$\mathbf{M_A} = \frac{\pi\rho}{4}\cdot\mathbf{b_1}\cdot(\mathbf{d_2} - \mathbf{d_1})^2 \qquad (5)$$

для схем д) и е).

Ширины колес, находящихся в зацеплении, будут зависеть от схемы механизма и расположения сателлитов (табл.1).

Таблица 1

Расположение сателлитов

Параметр	Радиальное расположение сателлитов			Окружное расположение сателлитов			г)	д) е)
	а)	б)	в)	а)	б)	в)		
$\varphi_1 = \mathbf{b_2/b_1}$	1	1	2	2	2	2	1	2
$\varphi_2 = \mathbf{b_3/b_2}$	2	1	0.5	1	1	1	2	1

Таким образом, с учетом (2) - (5) выражение (1) можно представить как

$$\mathbf{M} = \frac{\pi\rho}{4}\mathbf{b_1 d_1^2}\left(1 + \kappa\varphi_1\cdot\mathbf{U_1^2}\left(1 + \varphi_2\mathbf{y}^2\right) + \mathbf{n_M}\left(1 - \mathbf{U_1}\right)^2\right), \qquad (6)$$

где $\mathbf{U_1} = \pm\mathbf{d_2/d_1}$ (“+” – для внутреннего, а “**-**“ – для внешнего зацеплений); $\mathbf{y} = \mathbf{d_3/d_2}$.

Обеспечение контактной прочности в функции массы может быть учтено множителем $\mathbf{b_1 d_1^2}$, который равен [2] :

$$\mathbf{b_1 d_1}^2 \geq \frac{\mathbf{0.7\cdot T_1\cdot K_{HV}\cdot K_{H\beta}\cdot\Omega\cdot E_{ПР}}}{\mathbf{K\cdot\cos^2\alpha\cdot tg\alpha_\omega\cdot[\delta_H]^2}}\cdot\frac{\mathbf{U_1 - 1}}{\mathbf{U_1}}. \qquad (7)$$

Массу (6) с учетом (7) удобно представить в виде

$$\overline{M_H} = \frac{M}{C_{MH}} = \frac{U_1 - 1}{U_1} \cdot \left(\frac{1}{k} + k\varphi_i U_1^2 \cdot \left(1 + \varphi_2 y^2\right) + \frac{n_M}{k} \cdot \left(1 - U_1\right)^2 \right), \qquad (8)$$

где $C_{MH} = \dfrac{\pi\rho \cdot 0.7 T_1 K_{HV} K_{H\beta} \cdot \Omega \cdot E_{ПР}}{4\cos^2\alpha \cdot tg\alpha_\omega \cdot \left[\delta_H\right]^2}$.

Изгибная прочность в функции массы учитывается раскрытием множителя $b_1 d_1^2$ [2]:

$$b_1 d_1^2 \geq \frac{2 \cdot T_1 \cdot K_{FV} K_{F\beta} \cdot \Omega \cdot Y_{F1} \cdot Z_1}{K \cdot [\delta]_F}.$$

Уравнение (6) с учетом (8) представим в виде

$$\overline{M_F} = \frac{M}{C_{MF}} = \frac{1}{K} + \varphi_1 U_1^2 \left(1 + \varphi_2 y^2\right) + \frac{n_M}{K}\left(1 - U_1\right)^2, \qquad (9)$$

где $C_{MF} = \dfrac{\pi\rho \cdot T_1 K_{FV} K_{F\beta} \cdot \Omega \cdot Y_{F1} \cdot Z_1}{2 \cdot [\delta]_F}$.

В полученных функциях (8) и (9) имеются три переменных величины **U**, $\mathbf{U_1}$ и **y**. Независимо изменяющимся параметрам, в пределах заданного общего передаточного отношения **U**, может быть либо $\mathbf{U_1}$, либо **y**. Анализ взаимосвязи $\mathbf{U_1}$ и **y** доказал, что в качестве варьируемого параметра удобнее выбрать **y**. В связи с этим для всех анализируемых схем механизмов были введены зависимости $\mathbf{U_1}$ от **y**, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Зависимости $\mathbf{U_1}$ от **y** и **U**

Схема	Зависимости	
	Радиальное расположение сателлитов	Окружное расположение сателлитов
а)	$U_1 = \frac{2 - U}{2}$	$U_1 = \frac{U - 2}{y - 1}$
б)	$U_1 = \frac{U}{2(1 + y)}$	$U_1 = \frac{U}{y + 1}$
в)	$U_1 = \frac{U - 2}{2y}$	$U_1 = \frac{U - 2}{y - 1}$
г), е)	$U_1 = \frac{2 - U}{2}$	-
д)	$U_1 = \frac{U}{2(1 - y)}$	-

Для ряда исследуемых механизмов (схемы а), б), в) на рис.1) область возможного изменения величины **y** определенная ранее и представлена графически в [2].

Для оставшейся группы механизмов (схемы г), д), е) на рис.1) ограничения на параметр **y** определялись, исходя из условия $\mathbf{18 \le Z_i \le 180}$. С учетом дополнительного ограничения на возможные величины зубьев, накладываемого условием соосности, получены следующие системы неравенств для исследуемых механизмов:

$$\left.\begin{aligned}
&0.125 < \frac{z_2}{z_1} = \frac{U-2}{2} < 4.5,\\
&1.25 < \frac{z_3}{z_1} = y\,\frac{U-2}{2} < 10,\\
&1.25 < \frac{z_4}{z_1} = U-1 < 10,\\
&2.22 < \frac{z_3}{z_2} = y < 10,\\
&2.22 < \frac{z_4}{z_2} = \frac{2(U-1)}{U-2} < 10,\\
&0.3 < \frac{z_4}{z_3} = \frac{2(U-1)}{y(U-2)} < 1,
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

для схемы г) (рис. 1);

$$\left.\begin{aligned}
&1 < \frac{z_2}{z_1} = \frac{U}{2(1-y)} < 10,\\
&0.1 < \frac{z_3}{z_1} = \frac{Uy}{2(1-y)} < 9,\\
&0.1 < \frac{z_4}{z_1} = U-1 < 10,\\
&0.1 < \frac{z_3}{z_2} = y < 0.9,\\
&0.1 < \frac{z_4}{z_2} = \frac{2(U-1)(1-y)}{U} < 1.5,\\
&0.1 < \frac{z_4}{z_3} = \frac{2(U-1)(1-y)}{yU} < 10,
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

для схемы д);

$$\left.\begin{aligned}
&1.05 < \frac{z_2}{z_1} = \frac{2-U}{2} < 5.5,\\
&0.11 < \frac{z_3}{z_1} = y\frac{2-U}{2} < 5,\\
&1.11 < \frac{z_4}{z_1} = 1-U < 10,\\
&1.05 < \frac{z_3}{z_2} = y < 0.9,\\
&0.5 < \frac{z_4}{z_2} = \frac{2(1-y)}{2-U} < 1.8,\\
&0.1 < \frac{z_4}{z_3} = \frac{2(1-y)}{y(\ 2-U\ )} < 5,
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

для схемы е).

Совместное решение каждой из систем неравенств позволило получить область изменения варьируемого параметра **y**, описываемую следующими неравенствами:

$$\frac{2(\ U-1\ )}{U-2} < y < \begin{cases} \dfrac{20}{U-2} & (4 \le U \le 11); \\ 10 & (2.25 \le U \le 4), \end{cases} \qquad (13)$$

для схемы г);

$$\left.\begin{aligned}
&(1.1 \le U \le 1.8)\frac{U-1}{2}\\
&(1.8 \le U \le 2.25)0.1\\
&(2.25 \le U \le 8.5)\frac{U-1}{6U-1}\\
&(8.5 \le U \le 11)\frac{0.5U-2}{2(U-1)}
\end{aligned}\right\} < y < \begin{cases} \dfrac{1.9U-2}{2(U-1)}(1.1 \le U \le 2) \\ \dfrac{20-U}{20}(2 \le U \le 11) \end{cases} \qquad (14)$$

для схемы д) и

$$\frac{0.4(1-U)}{2-U} < y < 0.9(-8 \le U \le -0.11) \qquad (15)$$

для схемы е).

Подстановкой в формулы (8) и (9) зависимостей $\mathbf{U_1}$ от **y** (табл. 2) получены функции суммарной массы анализируемых механизмов в безразмерном виде. Эти функции оптимизации приведены в табл. 3, в которых индекс “H” означает учет контактной, а индекс “F” - изгибной прочности.

Таблица 3

Целевые функции оптимизации

Схема	Располо-жение сателлитов	Функция
1	2	3
а)	ради-альное	$\overline{M}_H = \frac{U}{K(U-2)}\left(1+\frac{K(2-U)^2(1+2y^2)}{4}+n_M\frac{U^2}{4}\right);$ $\overline{M}_F = \frac{1}{K}+\frac{(2-U)^2(1+2y^2)}{4}+n_M\frac{U^2}{4K};$
	окруж-ное	$\overline{M}_H = \frac{U-y-1}{K(U-2)}\left(1+\frac{2K(U-2)^2(1+y^2)}{(y-1)^2}+n_M\left(\frac{y-U+1}{y-1}\right)^2\right);$ $\overline{M}_F = \frac{1}{K}+\frac{2(U-2)^2(1+y^2)}{(y-1)^2}+\frac{n_M}{K}\left(\frac{y-U+1}{y-1}\right)^2;$
б)	ради-альное	$\overline{M}_H = \frac{U-2(1+y)}{KU}\left(1+\frac{2KU^2(1+y^2)}{4(y+1)^2}+\frac{n_M}{4}\left(\frac{2(1+y)-U^2}{y+1}\right)^2\right);$ $\overline{M}_F = \frac{1}{K}+\frac{U^2(1+y^2)}{4(y+1)^2}+\frac{n_M}{4K}\left(\frac{2(1+y)-U}{y+1}\right)^2;$
	окруж-ное	$\overline{M}_H = \frac{U-y-1}{KU}\left(1+\frac{2KU^2(1+y^2)}{(y+1)^2}+n_M\left(\frac{1+y-U^2}{y+1}\right)^2\right);$ $\overline{M}_F = \frac{1}{K}+\frac{2U^2(1+y^2)}{(y+1)^2}+\frac{n_M}{K}\left(\frac{1+y-U}{y+1}\right)^2;$
в)	ради-альное	$\overline{M}_H = \frac{2(1+y)-U}{2Ky}\left(1+\frac{K(U-2)^2(2+y^2)}{4y^2}+\frac{n_M}{4}\frac{(2(1+y)-U)^2}{y^2}\right);$ $\overline{M}_F = \frac{1}{K}+\frac{(U-2)^2(2+y^2)}{4y^2}+\frac{n_M}{4K}\frac{(2(1+y)-U)^2}{y^2};$

Окончание табл. 3

1	2	3
	окруж-ное	$\overline{M}_H = \dfrac{1+y-U}{K(y-1)}\left(1+\dfrac{2K(U-2)^2(1+y^2)}{(y-1)^2}+n_M\left(\dfrac{1+y-U^2}{y-1}\right)^2\right);$ $\overline{M}_F = \dfrac{1}{K}+\dfrac{2(U-2)^2(1+y^2)}{(y-1)^2}+\dfrac{n_M}{K}\left(\dfrac{1+y-U}{y-1}\right);^2$
г)	ради-альное	$\overline{M}_H = \dfrac{U}{U-2}\left(1+\dfrac{(2-U)^2(1+2y^2)}{4}+\dfrac{n_M U^2}{4}\right);$ $\overline{M}_F = 1+\dfrac{(2-U)^2(1+2y^2)}{4}+\dfrac{n_M U^2}{4};$
д)	ради-альное	$\overline{M}_H = \dfrac{U-2(1-y)}{U}\left(1+\dfrac{U^2(1+y^2)}{2(1-y)^2}+\dfrac{n_M}{4}\left(\dfrac{2(1-y)-U}{1-y}\right)^2\right);$ $\overline{M}_F = 1+\dfrac{U^2(1+y^2)}{2(1-y)^2}+\dfrac{n_M}{4}\left(\dfrac{2(1-y)-U}{1-y}\right)^2;$
е)	ради-альное	$\overline{M}_H = \dfrac{U}{U-2}\left(1+\dfrac{(2-U)^2(1+y^2)}{2}+\dfrac{n_M U^2}{4}\right);$ $\overline{M}_F = 1+\dfrac{(2-U)^2(1+y^2)}{2}+\dfrac{n_M U^2}{4}.$

Оптимальными параметрами механизмов будут такие, при которых суммарная масса будет минимальной. Найти такое значение **y** можно одним из двух способов. При первом, задавшись общим передаточным отношением, необходимо просчитать целевую функцию при всех возможных значениях **y** и выбрать ту его величину, при которой целевая функция минимальна. При втором способе нужно найти значение **y**, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 0\ . \qquad (16)$$

Следует заметить, что уравнение (16) не всегда имеет решение, лежащее в области допустимых значений **y**. Часть этих значений выходят за область, и оптимальными значениями **y** в этом случае следует считать те его величины, которые лежат на той границе, за которую выходят решения уравнения (16).

Для примера приведем оптимальные значения **y**, обеспечивающие минимальную массу при условии обеспечении изгибной прочности.

Для схемы а) (рис.1) с радиальным расположением сателлитов оптимальными будут минимально возможные значения **у**:

$$\mathbf{y_{opt} = y_{min}} \,. \tag{17}$$

Для схемы а) с окружным расположением сателлитов оптимальные значения **у** также располагаются на границе области существования механизма:

$$\mathbf{y_{opt} = 0.1(U \ge 3); \quad y_{opt} = y_{min}(3 \ge U \ge 2); \quad y_{opt} = y_{max}(2 < U)}. \tag{18}$$

Для схемы б) с радиальным расположением сателлитов решение уравнения (16) имеет вид

$$\mathbf{y_{opt} = \frac{U(2K + n_M)}{UK + 2n_M} - 1} \,. \tag{19}$$

При окружном расположении сателлитов для схемы б) оптимальными будут максимально возможные значения **у**:

$$\mathbf{y_{opt} = y_{max}} \,. \tag{20}$$

Для схемы в) с радиальным расположением сателлитов, а также для схем г), д) и е) оптимальное значение **у** будет минимальным

$$\mathbf{y_{opt} = y_{min}} \,. \tag{21}$$

Для схемы в) с окружным расположением сателлитов оптимальные значения **у** лежат внутри области существования механизма и определяются как

$$\mathbf{y_{opt} = 1 + \frac{(U-2)(4K + n_M)}{n_M - 2K(U-2)}} \,. \tag{22}$$

Для проектирования механизма минимальной массы с учетом изгибной прочности необходимо в зависимости от схемы по одному из уравнений (17)…(22) найти $\mathbf{y_{opt}}$ и, подставив его в генеральные уравнения [2], подобрать числа зубьев. Для других вариантов оптимизации $\mathbf{y_{opt}}$ находится по уравнению (16) с учетом выше описанных особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов В.Т. Определение весовых и инерционных характеристик элементов планетарных механизмов // Теория механизмов и машин. – 1982. – Вып. 32. – С. 85 - 87.*
2. *Ткаченко В.А., Абрамов В.Т., Коровкин М.Д. Проектирование планетарных механизмов, оптимальных по динамическим характеристикам. – Харьков : ХАИ, 1983. – 110 с.*

Поступила 03.01.2002

АБРАМОВ Владимир Тимофеевич*, канд. техн. наук, доцент кафедры НКАУ ХАИ. Окончил ХАИ в 1964 г. Область научных интересов – теоретическая механика.*

ДОВГОПОЛАЯ Ольга Юрьевна*, аспирантка НКАУ ХАИ. Окончила ХАИ в 1998 г. Область научных интересов – теоретическая механика.*