УДК 514.112.3

ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

к.ф.-м.н. С.В. Гадецкая
(представил д.т.н., проф. И.Д. Горбенко)

Приведено доказательство существования окружности девяти точек для тупоугольного и прямоугольного треугольников.

При изготовлении крупногабаритных машиностроительных конструкций сложной конфигурации широко используется плазовая технология. Она применяется, например, при построении в натуральную величину теоретического чертежа судна, изготовлении выкроек частей корпусов летательных аппаратов, имеющих оживальную форму и т.д. Суть этой технологии состоит в том, что с помощью специальных геометрических построений на лист конструктивного материала чертеж переносится в натуральную величину [1].

Процесс переноса линий, выполненных в масштабе на лист материала с преобразованием их в натуральную величину, получил название разметки. Это одна из важнейших технологических операций на этапе подготовки производства [2,3] и одна из немногих, где широко применяют классические геометрические построения циркулем и линейкой, даже если их физическая реализация осуществляется лазером, управление которым реализует компьютер. В некоторых задачах разметки плоского листа при плазовом проектировании возникают проблемы, приводящие к изучению так называемой окружности девяти точек.

1. Прямая Эйлера. Начнем с рассмотрения достаточно известных фактов из геометрии треугольника.

Треугольник, полученный соединением середин сторон данного треугольника, называется *серединным*. На рис.1 треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ является серединным треугольником треугольника ABC, где $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$ – соответственно середины сторон **BC**, **AC**, **AB**.

Исследование указанных двух треугольников приводит к целому ряду результатов, устанавливающих тесную взаимосвязь между их элементами. Укажем лишь некоторые из них, необходимые для дальнейшего рассмотрения. Введем обозначения: точка **R** – центроид Δ **ABC** (точка пересечения медиан); точка **H** – ортоцентр Δ **ABC** (точка пересечения высот). Проведем серединные перпендикуляры $\mathbf{A_1O}$ и $\mathbf{B_1O}$ треугольника **ABC**. Тогда *точка **O** их пересечения является центром описанной окружности Δ **ABC** и ортоцентром Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$.*

Далее, так как $\mathbf{AB_1A_1C_1}$ - параллелограмм (по построению), то его диагонали $\mathbf{AA_1}$ и $\mathbf{B_1C_1}$ точкой пересечения **P** делятся пополам, откуда получаем, что *медианы Δ $A_1B_1C_1$ лежат на медианах Δ **ABC***, следовательно*, точка **R** является центроидом и Δ $A_1B_1C_1$.*

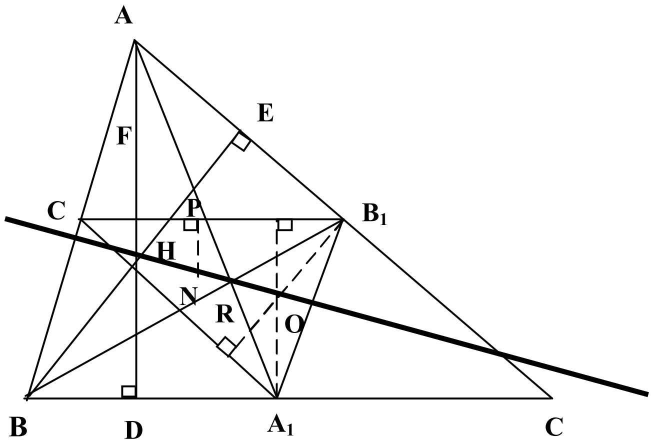

Рис. 1

Поскольку, в силу свойств средней линии треугольника, *треугольники **ABC** и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия 2*, отношение длин любых двух соответствующих отрезков этих треугольников будет равно 2:1, в частности, $\mathbf{AH=2A_1O}$ и $\mathbf{AR=2A_1R}$.

Используя параллельность **AD** и $\mathbf{A_1O}$, приходим к *подобию треугольников **AHR** и A_1OR с коэффициентом подобия 2*, откуда следует равенство углов **ARH** и $\mathbf{A_1RO}$ (что означает принадлежность точек **H**, **R**, **O** одной прямой); при этом **HR** = **2RO** (что указывает на особенность расположения точки **R** между точками **H** и **O**). Подводя итог проведенным рассуждениям, приходим к справедливости следующей теоремы.

***Теорема 1**. Ортоцентр **H**, центроид **R** и центр описанной окружности **O** треугольника **ABC** лежат на одной прямой (называемой прямой Эйлера). Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2:1.*

2. Окружность девяти точек. Продолжим изучение рис.1. Так как точка **O** является ортоцентром Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$, а точка **R** - его центроидом, то прямая **OR** - это прямая Эйлера Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$. Проведем серединный перпендикуляр **PN** треугольника $\mathbf{A_1B_1C_1}$, где **N** - точка пересечения его с прямой **OR**.

В силу утверждения предыдущего пункта центр описанной окружности Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$, принадлежащий **PN**, обязательно будет принадлежать к прямой Эйлера **OR**. Следовательно, точка **N** - точка описанной окружности Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$, причем ее радиус $\mathbf{r} = \mathbf{NA_1} = \mathbf{NB_1} = \mathbf{NC_1}$ в 2 раза меньше радиуса описанной окружности Δ **ABC** (в силу подобия Δ **ABC** и Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$). Так как $\mathbf{AH} \,||\, \mathbf{PN} \,||\, \mathbf{A_1O}$ и отрезок $\mathbf{AA_1}$ пересекает прямую **PN** в своей середине - точке **P**, то прямая **PN** равноудалена от прямых **AH** и $\mathbf{A_1O}$. Это означает, что точка **N** является серединой отрезка **HO**.

Введем в рассмотрение точку **F** - середину отрезка **AH**. Тогда, по установленному ранее соотношению $\mathbf{AH} = \mathbf{2A_1O}$, имеем $\mathbf{NA_1} = \mathbf{NF}$, т.е. точки $\mathbf{A_1}$ и **F** - диаметрально противоположны. Это означает, что точка **F** принадлежит описанной окружности Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$. Очевидно, это справедливо и для точек, являющихся серединами отрезков других высот Δ**ABC** от вершин до ортоцентра **H** (эти точки также носят имя Эйлера).

Замечая теперь, что прямой угол $\mathbf{A_1DF}$ опирается на диаметр $\mathbf{A_1F}$ рассматриваемой окружности, делаем вывод о принадлежности этой окружности точки **D**, а также, по аналогии, оснований всех высот треугольника **ABC**.

Таким образом, доказано, что описанная окружность треугольника $\mathbf{A_1B_1C_1}$, являющегося серединным по отношению к данному треугольнику ABC, проходит через его точки Эйлера и основания его высот. Другими словами, установлено существование окружности, проходящей через 9 специальных точек треугольника **ABC**. Сформулируем окончательный результат проведенного исследования.

Теорема 2*. Основания трех высот треугольника, середины трех его сторон и точки Эйлера лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек. Радиус этой окружности равен половине радиуса описанной окружности треугольника, а центр принадлежит прямой Эйлера и находится посередине между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.*

Подробные сведения об окружности девяти точек приведены в [4, с.53 - 77], [5, с.34 - 38], [6, с. 28 - 33, 145 - 147].

3. Частные случаи. При проведении всех рассуждений предыдущего пункта рассматривался остроугольный треугольник. Рассмотрение в литературе других случаев автором не найдено. Установим существование аналогичной окружности в случаях тупоугольного и прямоугольного треугольников.

В тупоугольном треугольнике **ABC** (рис. 2) отметим все девять точек.

Покажем, что они принадлежат одной окружности, перейдя для этого к рассмотрению остроугольного треугольника **AHC**.

Заметим, что вершина **B** тупого угла является ортоцентром Δ **AHC**. Меняются при переходе к рассмотрению треугольника **AHC** и роли девяти точек треугольника **ABC**: точки **D**, **E**, **K** - основания треугольника **AHC**, точки F, **T**, $\mathbf{B_1}$ – середины его сторон, а точки **M**, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{A_1}$ – его точки Эйлера. Но тогда по доказанной теореме все эти девять точек лежат на одной окружности, что и требовалось доказать. Таким образом, теорема об окружности девяти точек доказана.

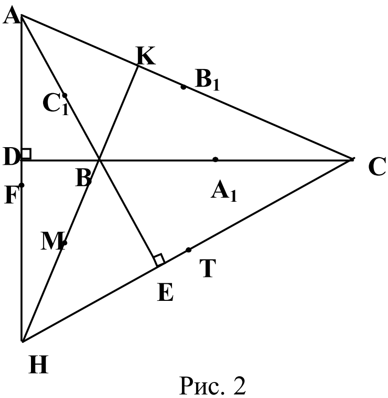

Рис. 2

Замечание. Проведенные рассуждения приводят к справедливости известной теоремы Гамильтона.

*Треугольники **ABC**, **ABH**, **ACH**, **BCH** (рис. 1), где **H** - ортоцентр треугольника **ABC**, имеют общую окружность девяти точек; при этом ее диаметр равен радиусам описанных окружностей указанных треугольников.*

В случае прямоугольного треугольника (рис. 3) рассмотрение девяти точек фактически сводится к пяти точкам **B**, $\mathbf{A_1}$, **K**, **O**, $\mathbf{C_1}$ (две точки Эйлера совпадают с серединами сторон - точками $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{C_1}$, а третья точка Эйлера и основания двух высот сливаются с вершиной **B** прямого угла).

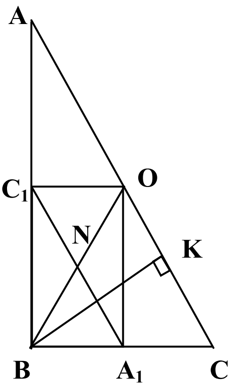

Рис. 3

Окружность, описанная около прямоугольника $\mathbf{BA_1OC_1}$, имеет центр в точке **N** пересечения его диагоналей и проходит через точку **K** как через вершину прямого угла, опирающегося на диагональ **BO** как на диаметр. Эта окружность является в данном случае искомой.

4. Задачи о замечательных точках. Рассмотрим некоторые задачи, связанные с окружностью девяти точек, а также с другими окружностями, проходящими через различные «замечательные» точки.

Задача 1. Биссектрисы внутренних углов треугольника **ABC** продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках $\mathbf{A_1}$,$\mathbf{B_1}$,$\mathbf{C_1}$ соответственно. Пусть **L** - точка пересечения биссектрис. Доказать, что середины отрезков **AL**, **BL**, **CL**, $\mathbf{A_1L}$, $\mathbf{B_1L}$, $\mathbf{C_1L}$, $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_1C_1}$, $\mathbf{B_1C_1}$ лежат на одной окружности.

Решение. Покажем, что данную задачу можно решить, применяя теорему об окружности девяти точек к Δ $\mathbf{A_1B_1C_1}$ (рис. 4).

Обозначим: $\angle$ **A** = α, $\angle$ **B** = β, $\angle$ **C** = γ. Тогда для дуг, на которые опираются соответствующие им вписанные углы, имеем:

$$\cup \mathbf{BA_1} = \cup \mathbf{A_1C} = \frac{\alpha}{2},\ \cup \mathbf{CB_1} = \cup \mathbf{B_1A} = \frac{\beta}{2},\ \cup \mathbf{AC_1} = \cup \mathbf{C_1B} = \frac{\gamma}{2}.$$

Обозначим через **V** точку пересечения отрезков $\mathbf{A_1B_1}$ и $\mathbf{CC_1}$. Так как угол $\mathbf{VB_1C_1}$ равен углу $\mathbf{A_1B_1C_1}$, который опирается на дугу $\mathbf{C_1A_1}$ величиной $\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$, а угол $\mathbf{VC_1B_1}$ равен углу $\mathbf{CC_1B_1}$, который опирается на дугу $\mathbf{CB_1}$ величиной $\frac{\beta}{2}$, то из $\Delta\mathbf{C_1VB_1}$ имеем:

$$\angle \mathbf{C_1VB_1} =$$

$$= 180^\circ - \angle \mathbf{VB_1C_1} - \angle \mathbf{VC_1B_1} =$$

$$= 180^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = \mathbf{90}^\circ,$$

откуда следует, что $\mathbf{C_1V}$ – высота $\Delta\mathbf{A_1C_1B_1}$, а точка **T**, являющаяся серединой отрезка $\mathbf{C_1L}$, – точка Эйлера этого треугольника.

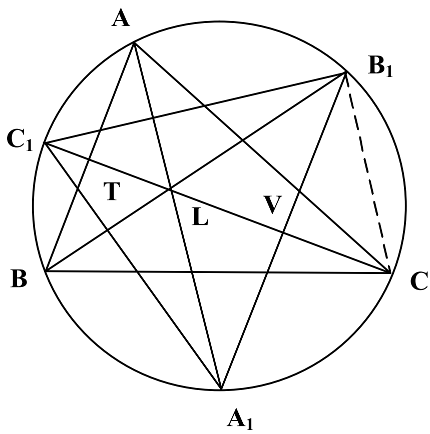

Рис. 4

Далее, так как углы $\mathbf{BB_1A_1}$ и $\mathbf{CB_1A_1}$, опирающиеся на равные дуги $\mathbf{BA_1}$ и $\mathbf{A_1C}$, равны, то высота $\mathbf{B_1L}$ треугольника $\mathbf{LB_1C}$ является и его биссектрисой. Отсюда следует, что точка **V** является серединой отрезка **CL**, т.е. также одной из указанных в условии задачи девяти точек.

Аналогичные рассуждения можно провести для середин отрезков $\mathbf{A_1L}$, $\mathbf{B_1L}$, **AL**, **BL**.

Подводя итог, получаем, что середины отрезков **AL**, **BL**, **CL** – это основания высот $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1}$, середины отрезков $\mathbf{A_1L}$,$\mathbf{B_1L}$,$\mathbf{C_1L}$ - это точки Эйлера $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1}$, а середины отрезков $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_1C_1}$, $\mathbf{B_1C_1}$ - это середины сторон $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1}$.

Это означает, в силу теоремы об окружности девяти точек, что середины всех указанных отрезков лежат на одной окружности.

Задача 2. Доказать, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

Решение. Пусть **АВСД** - данный четырехугольник (рис. 5). Отметим на рисунке точки $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{Д_1}$ – середины его сторон. Тогда четырехугольник $\mathbf{A_1}$,$\mathbf{B_1}$,$\mathbf{C_1}$,$\mathbf{Д_1}$ – прямоугольник (по свойствам средней линии треугольника), а точка **N** пересечения его диагоналей – центр описанной около $A_1B_1C_1Д_1$ окружности. Далее, по теореме Брахмагупты ([5], с.74 - 75), при выполнении условий задачи медиана HA_1 треугольника **ABC** и высота **HK** треугольника **ДСН** лежат на одной прямой (в этом несложно убедиться непосредственно, если использовать равенство углов, отмеченных на рисунке). Но тогда указанная выше окружность проходит и через точку **К** как через вершину прямого угла, опирающегося на отрезок A_1C_1 как на диаметр. Аналогично доказывается принадлежность этой же окружности других трех оснований перпендикуляров, опущенных из точки **H** на стороны **АВСД**. Таким образом, существование окружности, проходящей через 8 указанных в задаче точек, установлено.

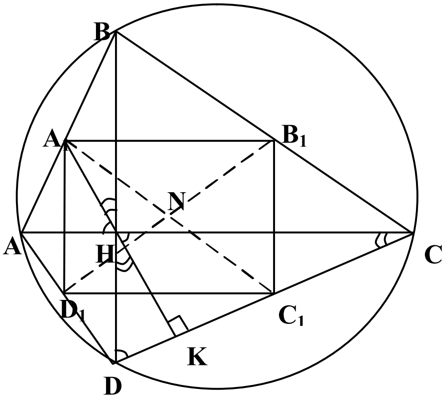

Рис. 5

Вывод. Приведенные решения задач позволяют повысить качество разметки и улучшить аэродинамические характеристики поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Политехнический словарь / Под ред. акад. А.Ю. Ишлинского. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 656 с.*
2. *Шмыгин В.В. Графические методы расчетов в машиностроении.– М.: Машиностроение, 1967. – 287 с.*
3. *Мотыко А.С., Островский И.Д. Развертки поверхностей листовых изделий. – М.: МАШГИЗ, 1961. – 160 с.*
4. *С.И. Зетель. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962. – 152 с.*
5. *Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966. – 648 с.*
6. *Г.С.М. Кокстер, С.Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.*

Поступила 15.02.2002

***ГАДЕЦКАЯ Светлана Викторовна**, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики и информационных технологий Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1986 году закончила Харьковский государственный университет. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, геометрия треугольника.*