УДК 519.612:691.32/.34

РЕШЕНИЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОСТАВА ЛЕГКОГО БЕТОНА

к.т.н. В.Ю. Дубницкий, к.т.н. В.Г. Наникашвили
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

В статье описано решение плохо обусловленной системы линейных уравнений, описывающей процесс определения состава легкого бетона. Вычислены допустимые ошибки определения переменных.

Постановка проблемы. В настоящее время отсутствует строго обоснованное решение задачи подбора состава легкого бетона. Известные методики [1, 7] являются в значительной мере эмпирическими, что приводит к неоправданному удорожанию конечного продукта и отсутствию единообразия в технических решениях.

В этих методиках не учитывается влияние погрешностей на конечный результат расчета и не рассмотрены способы определения их допустимых величин.

Анализ литературы. В [1] для определения составов легких бетонов рекомендовано применять следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{К}{\gamma_К} + \dfrac{П}{\gamma_П} + \dfrac{Ц}{\rho_Ц} + В = 1; \\ qЦ + К + П = \gamma_\delta, \end{cases} \tag{1}$$

где К, П, Ц, В – искомые величины расхода крупного (К) и мелкого (П) заполнителей на 1 м^3 бетонной смеси; Ц – расход цемента; В – воды; q – эмпирический коэффициент; γ_δ – объемная масса бетона. После необходимых преобразований, изложенных в указанном выше источнике, система (1) может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ ax_1 + bx_2 = g. \end{cases} \tag{2}$$

В этой системе известные величины a, b, g больше нуля. Так, как по физическому смыслу задачи ее решение должно быть неотрицательным, то:

$$x_1 = \frac{g-b}{a-b}; \quad x_2 = \frac{a-g}{a-b} \tag{3}$$

или $$x_1 = \frac{b-g}{b-a}; \quad x_2 = \frac{g-a}{b-a}. \tag{4}$$

Условие (3) будет выполнено, если $b < g < a$, условие (4) будет выполнено, если $a < g < b$. Очевидно, что если $b \to a$, то решение утрачивает физический смысл. Коэффициенты a, b и величину g определяют на основе экспериментальных данных, которым присуща естественная методическая и случайная погрешность. Поэтому вместо системы (2) следует рассматривать систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ ax_1 + bx_2 = g + \Delta g. \end{cases} \tag{5}$$

Цель работы: решение системы (5) в аналитическом виде, применяя методы теории некорректных задач [2].

Решение системы (5). Пусть:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ g + \Delta g \end{pmatrix}.$$

Тогда вместо решения системы (4) следует искать решение системы

$$\left(\alpha E + A^T A \right) X = A^T Y, \tag{6}$$

где E – единичная матрица; α – параметр регуляризации, $\alpha \to 0$.

Выполнив необходимые преобразования, получим, что:

$$x_1 = \frac{1}{w}\left[a(\alpha g - b + g) + \alpha + b^2 + bg + 2 \right]; \tag{7}$$

$$x_2 = \frac{1}{w}\left[a^2 + a\,(g - b) + \alpha\,(bg + 1) + bg + 2 \right]; \tag{8}$$

$$w = a^2(\alpha + 1) - 2ab + \alpha^2 + \alpha\left(b^2 + 2 \right) + b^2. \tag{9}$$

В тех случаях, когда $\left| a - b \right| > 0$, расчеты выполняют по формулам (3) и (4), в тех случаях, когда определитель системы (2) близок к нулю, расчеты следует проводить по формулам (7) – (9). В этом случае говорят, что система (2) плохо обусловлена. Мерой обусловленности системы (2) примем N – число обусловленности матрицы A [3], которое определяют по формуле

$$N(A) = \frac{1}{n} Sp\left(A^T A \right) \cdot \left(A^T A \right)^{-1}. \tag{10}$$

В нашем случае получим, что:

$$N(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 + b^2 + 2 \right)}{\left(a - b \right)^2}. \tag{11}$$

В [3] отмечено, что величина N(A) имеет следующий вероятностный смысл. Примем, что неизвестные x_i и коэффициенты a_{ij} суть случайные величины, имеющие конечные среднеквадратические отклонения σ_{xi} и σ_{aij} соответственно. В свою очередь погрешности определения этих величин имеют средние квадратические отклонения $\sigma_{\Delta xi}$ и $\sigma_{\Delta aij}$. Тогда

$$N\left(A\right)=\frac{\sigma_{\Delta xi}}{\sigma_{xi}}\Bigg/\frac{\sigma_{\Delta aij}}{\sigma_{aij}}. \qquad (12)$$

Используя понятие эластичности [4] можно сказать, что N(A) является эластичностью среднего квадратического ошибки переменной по среднему квадратическому ошибки коэффициентов.

В случае, когда N(A) равно единице, следует независимость величины Δx_i от величины Δa_{ij}. Для определения предельно допустимых погрешностей в определении значений величин x_1, x_2 (Δx_1, Δx_2) соответственно, необходимо определить условие

$$\|\Delta X\| \le \frac{\|\Delta Y\|}{(\det A)^2}\cdot\left(\sum_i^n\sum_j^n a_{ij}^2 \Big/ (n-1)\right)^{n-1}, \qquad (13)$$

где символом $\|.\|$ обозначена евклидова норма соответствующего вектора.

Отсюда получим, что

$$\|\Delta x\| \le \frac{(\Delta g)^2}{(b-a)^2}\left(a^2+b^2+2\right) \qquad (14)$$

или

$$\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2} \le B \qquad (15)$$

(В – правая часть неравенства (14)).

Из анализа условия (15) следует, что если $\Delta x_1 = \Delta x_2$, то

$$\Delta x \le B/\sqrt{2} \le 0{,}707\ B. \qquad (16)$$

Если же известно, что $\Delta x_1/\Delta x_2 = K$, то:

$$\Delta x_2 \le B/\sqrt{1+K}\,; \quad \Delta x_1 \le \left(K/\sqrt{K+1}\right)B. \qquad (17)$$

Полученные решения, как следует из (7) – (9), являются функциями параметра α и требуемой точности их решения δ.

Их определяют из условия, приведенного в [3]:

$$\rho\left(\alpha\right)=\left|\,\|A\tilde{X}_\alpha-\tilde{Y}\|-\delta\,\right|\to \min, \qquad (18)$$

где $\widetilde{X}_\alpha$ – вектор оценок (7, 8) неизвестных, полученных при данном α. Обозначим $\widetilde{X}_i(\alpha)$, $(i = 1, 2)$, численные значения x_i, полученные при данном α.

Тогда условие (18) примет вид:

$$\rho(\alpha) = \left| \sqrt{\left(\widetilde{X}_1(\alpha) + \widetilde{X}_2(\alpha) - 1\right)^2 + \left(a\widetilde{X}_1(\alpha) + b\widetilde{X}_2(\alpha)\right) - \left(g + \Delta g\right)^2} - \delta \right|. \quad (19)$$

Задавшись интервалами $[\delta_1; \delta_2]$ и $[\alpha_1; \alpha_2]$, условие (19) минимизируют по переменным δ и α.

Более подробно процедура минимизации описана в [5]. Вычисленные при этом x_1^* и x_2^* будут оценками неизвестных величин x_1 и x_2, полученными с требуемой точностью.

В том случае, когда по технологическим условиям преобразование системы (1) к виду (2) нежелательно, используем следующий прием.

Перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} CК^{(1)} + hП^{(1)} + mЦ^{(1)} + В = 1; \\ К^{(2)} + П^{(2)} + qЦ^{(2)} = \gamma_\delta, \end{cases} \quad (20)$$

где $C = 1/\gamma_\delta$, $h = 1/\gamma_п$, $m = 1/\rho_ц$. В этом случае получим систему двух линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными: К, П, Ц, В.

Ее решение получим, используя метод интервалов [6]. Для этого введем вспомогательные неизвестные $К^{(1)}$, $К^{(2)}$, $П^{(1)}$, $П^{(2)}$, $Ц^{(1)}$, $Ц^{(2)}$, В и вспомогательную функцию F вида:

$$\begin{aligned} F = &\left(CК^{(1)} - К^{(2)}\right)^2 + \left(hП^{(1)} - П^{(2)}\right)^2 + \left(mЦ^{(1)} - qЦ^{(2)}\right)^2 + В^2 + \\ &+ \left(CК^{(1)} + hП^{(1)} + mЦ^{(1)} + В - 1\right)^2 + \left(К^{(2)} + П^{(2)} + qЦ^{(2)} - \gamma_\delta\right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Минимизируя (21) по каждой из вспомогательных переменных и приравнивая соответствующие частные производные нулю, получим:

$$\begin{cases} 2CК^{(1)} - К^{(2)} + hП^{(1)} + mЦ^{(1)} = 1; \\ -CК^{(1)} + 2К^{(2)} + П^{(2)} + qЦ^{(2)} = \gamma_\delta; \\ CК^{(1)} + 2hП^{(1)} - П^{(2)} + mЦ^{(1)} + В = 1; \\ К^{(2)} - hП^{(1)} + 2П^{(2)} + qЦ^{(2)} = \gamma_\delta; \\ CК^{(1)} + hП^{(1)} + 2mЦ^{(1)} - qЦ^{(2)} + В = 1; \\ CК^{(1)} + hП^{(1)} + mЦ^{(1)} + 2В = 1; \\ К^{(2)} + П^{(2)} - mЦ^{(1)} + 2qЦ^{(2)} = \gamma_\delta. \end{cases} \quad (22)$$

Примем, что $К^{(1)*}$, $К^{(2)*}$, $П^{(1)*}$, $П^{(2)*}$, $Ц^{(1)*}$, $Ц^{(2)*}$, $В^*$ – решение этой системы. Пусть $К_{min}$ – наименьшее значение, $К_{max}$ – наибольшее из пары $К^{(1)*}$, $К^{(2)*}$. Аналогичные обозначения введем для остальных неизвестных.

Тогда решением системы (22) в смысле, указанном в [6], будет такое:

$$К_{min} \le К \le К_{max};\, П_{min} \le П \le П_{max};$$

$$Ц_{min} < Ц < Ц_{max};\;\; В = В^*.$$

Выводы. 1. Получено в явном виде классическое решение плохо обусловленной системы преобразованных уравнений, описывающих процесс подбора состава легких бетонов.

2. Получено интервальное решение этой же системы в исходном виде.

3. В каждом из этих случаев определены допустимые погрешности переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженов Ю.М. Способы определения состава бетона различных видов. – М.: Стройиздат, 1975. – 268 с.*
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 223 с.*
3. *Степанов Н.Ф., Ерлыкина М.Е., Филиппов Г.Г. Методы линейной алгебры в физической химии. – М.: Изд. МГУ, 1976. – 359 с.*
4. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 199 с.*
5. *Дубницкий В.Ю., Чернявский В.Л. Регуляризация расчета уравнений регрессии при моделировании свойств цементных бетонов // Всесоюзный симпозиум по обобщению задачи идентификации сложных систем. – Х.: ХГУ. – 1979. – 273 с.*
6. *Бобрищев А.В., Рудченко Н.А., Решотка Х.С. Решение некоторых нестандартных задач линейной алгебры и линейного программирования // АН УССР, Институт проблем энергосбережения. Препринт 91-5. – К.: ИПЭ. – 1991. – 35 с.*
7. *ДСТУ БВ.2.7-18-95 Будівельні матеріали. Бетони легкі. Загальнотехнічні умови.*

Поступила 24.01.2003

ДУБНИЦКИЙ Валерий Юрьевич, *кандидат технических наук, доцент Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1975 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – исследование операций.*

НАНИКАШВИЛИ Вахтанг Григорьевич, *кандидат технических наук, доцент Харьковской Государственной академии городского хозяйства. В 1965 году окончил Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта. Область научных интересов – технология легких бетонов.*