

МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СОЕДИНЕНИЙ ПО ТОПОЛОГИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

к.т.н. Н.В. Белоус, А.С. Смелякова
(представил д.т.н., проф. В.П. Путятин)

Поставлена задача поиска оптимального пути в неодносвязной области, который при некоторых ограничениях минимизирует заданный функционал и обращает в минимум число пересечений с заданной сетью. Предложен метод ее решения, основанный на топологической факторизации пространства путей.

Постановка проблемы и анализ литературы. Рост возможностей вычислительной техники и программных систем общего назначения позволяют автоматизировать все более широкий класс задач проектирования и управления на основе развития соответствующих методов моделирования и оптимизации. В полной мере это можно отнести и к обширному разделу геометрического проектирования [1], а именно к задачам соединения [1, 2], которые связаны с поиском оптимальных трасс транспортных и инженерных коммуникаций в областях сложной геометрической формы (неодносвязных многообразиях), где функционалы и ограничения таковы, что к решению соответствующих задач не могут быть применены традиционные методы вариационного исчисления или математического программирования; в частности, в данном случае, когда экстремали могут пересекать ребра заданной сети.

Задачи соединения подобного типа возникают в практике проектирования автомобильных дорог [3, 4] и железнодорожных линий [5], различных типов инженерных сетей [6 – 11]: магистральных трубопроводов, канализации и водопровода, тепловых сетей, гидроузлов, а также при проектировании развития и обустройства регионов [12, 13]. Кроме того, актуальной проблемой повышения уровня экологической и техногенной безопасности [14] является не только предупреждение чрезвычайных ситуаций, но и уменьшение их материальных и социальных последствий за счет повышения эффективности мониторинга и управления процессами ликвидации последствий аварий на объектах ядерной и химической промышленности; в частности, при оперативном планировании маршрутов движения крупногабаритной и специальной техники по пере-

сеченной местности и в экстремальных условиях [15], когда требуется найти трассу, имеющую минимальное число пересечений с распределенными объектами, представляющими помехи для движения в целях оперативной оптимизации сил и средств, выделенных для ликвидации последствий аварий.

Поэтому актуальной проблемой повышения эффективности проектов и минимизации последствий чрезвычайных ситуаций является развитие моделей и методов решения задач соединения рассматриваемого типа. Хотя они характеризуются чрезвычайным разнообразием критериев оптимальности и ограничений, накладываемых на геометрические параметры трасс, и не сводятся к известным [1, 16] моделям геометрического моделирования, общим аспектом задач этого типа является нерешенная проблема поиска трассы на местности, имеющей минимальное число пересечений с “помехами” типа рек, железнодорожных путей, ограждений и иных объектов, преодоление которых возможно, но влечет существенные дополнительные затраты (по времени или обобщенной стоимости). Математически это задача на построение оптимального пути в области, имеющей сложную геометрическую конфигурацию, в условиях лексикографической оптимизации, когда важнейшим критерием является число пересечений с заданными сетями, ребра которых считаем неориентированными.

Цель статьи. По основному критерию рассматриваемый класс прикладных задач сводится к задаче оптимизации на топологической модели области, которую можно сформулировать следующим образом.

Задача. В двумерном многообразии F дана сеть $H = \{h_i\}_{i=1}^m$ и пара точек A, B . Требуется найти соединяющий эти точки путь $p_* \subset F$, который удовлетворяет заданным ограничениям Q и при минимальном числе пересечений с ребрами сети H минимизирует некоторый функционал f . При этом путь p_* может пересекать ребра сети H только во внутренних точках ребер.

Разработка метода решения этой базовой задачи и представляет цель данной работы.

Топологическая модель задачи. Рассмотрим поставленную задачу в предположении, что многообразие F задано следующим образом:

$$F = ClD_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n ClD_i \right), \quad (1)$$

где Cl – операция замыкания [17]. Сеть H не обязательно связана, а ее

ребра могут касаться границ L_i односвязных областей $D_i, (i=0,1,\dots,n)$, только в вершинах.

Существенное отличие данной задачи от родственных задач, рассматриваемых в теории графов и при оптимизации в выпуклых областях, состоит в использовании континуальной модели допустимой области, которая не является выпуклой или односвязной. Необходимость рассмотрения подобных геометрических моделей обусловлена тем, что в ряде приложений дискретные или выпуклые модели не обеспечивают требуемой точности, приводят к необходимости ручной доработки машинного решения, а также могут вызвать затруднения при учете различных технологических ограничений.

Для описания континуальных пространств путей [17] (где путь понимается как непрерывное отображение единичного отрезка в многообразии) была разработана дискретно-континуальная модель, основу которой составляет базис классов эквивалентности путей [2]. Он определяет конечную совокупность путей, всевозможные произведения которых порождают непрерывные семейства путей в соответствующем многообразии F . При этом следует иметь в виду, что хотя геометрические образы самопересекающихся путей $p = ACDECB$ и $q = ACEDCB$ совпадают (рис. 1), на топологическом базисе они определяют различные классы путей, причем первый из них посредством деформации в F определяет кратчайший путь из A в B – отрезок AB (заштрихованная область на рис.1 задает “область запрета”).

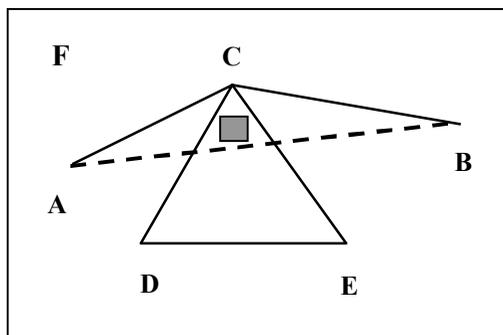


Рис. 1. Самопересекающийся путь $ACDECB$ и определяемая им кратчайшая AB

При использовании данного подхода на уровне топологической модели применимы различные методы дискретной оптимизации, связанные с перебором экстремалей, определяемых различными классами эквива-

лентности путей (например, [1, 18]). На непрерывном уровне используются методы вариационного типа, связанные с применением оптимизирующей деформации, т.е. такой деформации [17] пути, которая приводит к получению экстремали в данном классе с учетом ограничений Q метрического характера.

Метод решения задачи. В данной работе этот подход применяется к решению поставленной задачи в предположении существования соответствующей оптимизирующей деформации φ для функционала f . С этой целью переходим от геометрической модели (1) многообразия F к дискретной посредством построения базиса классов эквивалентности путей (далее просто базиса), считая вершины сети H (рассматриваемой как геометрический объект) областями запрета. Затем, интерпретируя полученную дискретную модель как граф, выделяем порождаемые им простые [2] пути $\tau_* = \{\tau_i\}_i$, имеющие минимальное число пересечений с ребрами сети H .

После этого, применяя к путям из τ_* требуемую оптимизирующую деформацию φ , получим полный набор экстремалей $\{\varphi\tau_i\}_i$.

Рассмотрим сеть $S = H \cup_{i=0}^n L_i$. Выделим в ней все ребра со свободным концом и обозначим H_1 образуемую ими сеть. Если множество H_1 не пусто, выделим на сети $S \setminus H_1$ все ребра со свободным концом и обозначим их H_2 ; продолжаем выделять подобные ребра до выполнения соотношений $H_{k-1} \neq \emptyset$, $H_k = \emptyset$. Объединение сетей $\{H_i\}_{i=1}^k$ обозначим S_1 . Компоненты связности сети S_1 обозначим $\{S_j^1\}_{j=1}^l$. Ясно, что экстремаль p_* не должна пересекать сеть S_1 .

Сеть $S \setminus S_1$ имеет столько же компонент связности, сколько содержит сеть S . Могут найтись такие компоненты связности сети $S \setminus S_1$, что в определяемых ими разбиениях пространства R^2 ни одна из ограниченных областей не содержит ни точку A , ни точку B . Объединение подобных дизъюнктивных сетей $\{S_j^2\}_{j=1}^l$ обозначим S_2 и положим $S_* = S \setminus (S_1 \cup S_2)$. По построению каждая сеть S_j^2 не имеет ребер со свободным концом и разбивает R^2 на одну неограниченную и некоторое число ограниченных областей (граней), объединение которых с сетью S_j^2

обозначим E_j . Очевидно, что экстремаль p_* не должна иметь общих точек с замкнутыми односвязными множествами E_j .

Множество $\{E_j\}_{j=1}^{j_2}$ можно разбить на два подмножества E' и E'' так, что любая пара множеств из E' дизъюнктна (т.е. не имеет общих точек), а любое множество из E'' покрывается некоторой областью из E' . Аналогично разобьем множество сетей $\{S_j^1\}_{j=1}^{j_1}$ на два подмножества S' и S'' так, что все сети из S_1 , покрытые множествами из E' , лежат в S'' . Можно считать, что $E = E'$, а $S_1 = S'$.

Сеть S_* разбивает D_0 на некоторое число областей $\{z'_i\}_{i=0}^k, \{z''_i\}_{i=0}^l$, где z''_i – те из областей D_i , которые покрыты множествами из E_j . Если $l = 0$, это означает, что таких областей не существует.

Связные сети $\{S_j^1\}_{j=1}^{j_1}$ и замкнутые односвязные множества $\{E_j\}_{j=1}^{j_2}$ лежат в областях z'_i и не должны иметь общих точек с экстремалью. Сеть S_* может быть несвязной, даже если исходная сеть H связна. Поскольку экстремаль не должна содержать точек, общих с множеством $Cl D_i, (i = 0, 1, \dots, n)$, отнесем области z'' (совпадающие с некоторой областью D_i , граница L_i которой и сеть H дизъюнкты) к множеству E , удаляя из сети S_* соответствующие компоненты связности – простые замкнутые кривые, являющиеся границами областей D_i .

В результате получаем, что сеть S_* разбивает D_0 на области $\{z'_i\}_{i=0}^k$ и $\{z''_i\}_{i=0}^{k_1}$. Каждая область z'_i является гранью сети S_* . В каждой из граней z'_i соответствующие множества из S_1 или E определяют область $z_i \subset z'_i$, допустимую для прохождения экстремали. Точки A и B лежат в некоторых областях из $\{z_i\}_i$ и существует конечная последовательность областей $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_q}$, где области z_{i_k} и $z_{i_{k+1}}$ попарно смежны (т.е. имеют общее ребро, принадлежащее сети H) и $z_A = z_{i_1}, z_B = z_{i_q}$. Поскольку экстремаль не должна касаться границ L_i по условию, то, говоря далее о пересечении ребра сети S_* , будем иметь ввиду те ребра, что принадлежат сети H .

Таким образом, каждому пересечению экстремали p^* с сетью H взаимно однозначно соответствует пересечение с границей области z_i .

Рассмотрим граф GS , совпадающий с полученной сетью. Его гранями будут области z'_i .

Если точки A и B лежат в одной области z_i , то воспользовавшись методом, изложенным в [2], и применяя оптимизирующую деформацию φ , можем минимизировать функционал f при ограничениях Q в классе эквивалентности путей $[\tau]$. Прodelать это можно для всех классов эквивалентности путей, лежащих в области z_i (а значит, не имеющих пересечений с границей области z_i). Поскольку $z_i \subset z'_i$, то рассматриваемый путь не будет иметь пересечений и с границей области z'_i , т.е. будет в одной грани графа GS .

Пусть точки A и B лежат в различных областях $z_A = z_{i_1}$ и $z_B = z_{i_2}$, причем $i_1 \neq i_2$. Тогда существует конечная последовательность попарно смежных областей $\{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_\gamma}\}$, $z_{i_1} = z_A$, $z_{i_\gamma} = z_B$. Понятно, что при $\gamma > 1$ построенный путь пересечет по крайней мере γ ребер сети $S(H)$, поэтому для решения поставленной задачи необходимо найти кратчайшую последовательность (т.е. последовательность с минимальным числом членов) смежных областей подобного вида. Но поскольку $z_i \subset z'_i \quad \forall i$, достаточно искать кратчайшую последовательность смежных граней графа $\{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_\gamma}\}$, где $z_A \subset z'_{i_1}$, $z_{i_j} \subset z'_{i_j}$, $\forall j = 2, 3, \dots, \gamma - 1$; $z_B = z'_{i_\gamma}$.

Заметим, что последовательностей с одинаковым (минимальным) числом членов может оказаться несколько, тогда процедуру выбора экстремали будем проводить для каждой такой последовательности.

Для отыскания кратчайшей последовательности (последовательностей) смежных граней графа GS построим вспомогательный граф GZ . Вершинами графа GZ объявим конечные грани графа z'_i . Вершины графа GZ будем обозначать так же, как и соответствующие грани графа GS , т.е. грани z'_i отвечает вершина z'_i графа GZ . Множество ребер графа GZ определим следующим образом: ребро $z'_i z'_j$ между вершинами z'_i и z'_j в графе GZ существует в том и только в том случае, если соответствующие грани (z'_i и z'_j) графа GZ смежные.

Если $A \subset z'_A$, а $B \subset z'_B$, то будем искать на графе GZ кратчайший

путь из вершины z'_A в вершину z'_B . Поскольку все вершины графа GZ равноправны, можно считать, что все они имеют вес 1, а, следовательно, для поиска кратчайшего пути на графе GZ можно применять любой из известных алгоритмов [18], учитывающий требования к простым путям, изложенные в [2]. Найдя минимальный путь из вершины z'_A в вершину z'_B на графе GZ, находим кратчайшую последовательность смежных граней графа GS. После этого получаем область, содержащую пути $\tau_* = \{\tau_i\}_i$, имеющие минимальное число пересечений с сетью H. При этом экстремали функционала f получаются также, как и в случае, когда точки A и B лежат в одной области – посредством применения оптимизирующей деформации ϕ к путям из τ_* .

Выводы. Предложенный метод решения поставленной задачи оптимизации соединений в неодносвязных областях по топологическому критерию – числу пересечений с ребрами заданной сети – обеспечивает полноту перебора экстремалей и возможность минимизации функционалов достаточно общего вида, причем с помощью известных дискретных и вариационных методов. При этом затраты памяти, что существенно для задач данного класса, имеют линейную зависимость от размерности данных сетей H, $\{L_i\}_{i=0}^n$.

В качестве дальнейшего развития предложенного подхода представляется целесообразным рассмотреть лексикографическую оптимизацию, вводя второй по значимости критерий, учитывающий метрические параметры трасс.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Элементы теории геометрического проектирования / И.В. Аристова, В.М. Комяк, С.В. Смеляков, С.В. Яковлев и др. – К.: Наук. думка, 1995. – 247 с.*
2. *Смеляков С.В. Топологическое моделирование сетей в задачах геометрического проектирования // Электронное моделирование. – 1993. – № 3. – С. 87 – 83.*
3. *Бойков В.Н., Шумилов Б.М., Люст С.Р. Трассирование автомобильных дорог: аспекты компьютерной реализации // Автомобильные дороги. – 1995. – № 12. – С. 23 – 25.*
4. *Білятинський О.А., Цибенко Ю.А., Старовойда В.П., Ігнатов С.Л. Методи розв'язання математичної моделі побудови оптимальної дорожньо-транспортної мережі // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – Вип. 54. – К.: Техніка. – 1997. – С. 51 – 54.*
5. *M. Van Witsen. The Netherlands and New International Rail Infrastructure // Tijdschrift voor Economische en Sociale Geografie. – 1996. – № 2. – P. 181 – 187.*

6. *Найденев В.М., Коршунова Л.Г., Любченко Л.А. Комплексное математическое моделирование системы пласт-скважины-газосборная сеть // Газовая промышленность. – 1991. – № 9. – С. 28 – 29.*
7. *Коваленко А.Г. О сводимости задачи идентификации параметров элементов гидравлических цепей к задачам потокораспределения // Труды XI-й Международной Байкальской школы-семинара. – Иркутск: Иркутский госуниверситет. – 1998. – С. 99 – 102.*
8. *Каганович Б.М., Меренков А.П., Бальшиев О.А. Элементы теории гетерогенных гидравлических цепей. – Н-ск: Наука, 1997. – 120 с.*
9. *Бальшиев О.А., Каганович Б.М., Меренков А.П. Трубопроводные системы тепло- и водоснабжения как динамические модели гидравлических цепей // Изв. РАН, сер. Энергетика. – 1996. – № 2. – С. 96 – 104.*
10. *Аристова И.В., Литвинов В.Н. Математическая модель задачи рационального размещения оборудования в машинном зале энергоблока ТЭС // Пробл. машиностроения. – 1983. – № 19. – С. 72 – 75.*
11. *Толмачев Л.В. Выбор расположения гидроузлов в зависимости от рельефа местности // Гидротехническое строительство. – 1991. – № 10. – С. 32 – 35.*
12. *Кучук Г.А. Формалізація предметної області багатовимірних баз даних // Системи обробки інформації. – Х. : ХФВ: «Транспорт України», 2001. – Вип. 1(11). – С. 110 - 114.*
13. *Ерешко Ф.И. Приложение методов исследования операций к решению региональных экономических задач // Труды XI-й Международной Байкальской школы-семинара: Пленарные доклады. – Иркутск: Иркутский госуниверситет. – 1998. – С. 125 – 139.*
14. *Теория систем в приложении к проблемам защиты окружающей среды / А. Колорин, А. Лепски и др.; Под ред. С. Ринальди; Пер. с итал. В.Е. Краскевича. – К.: Вища школа, 1981. – 263 с.*
15. *Мазманишвили А.С., Рафалович О.Я., Слипченко Н.И. Оперативная маршрутизация транспортных средств на основе синтеза информатизационных карт спутниковой связи // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 26 – 28.*
16. *Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. – М.: Мир, 1989. – 478 с.*
17. *Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии: геометрические главы. – М.: Наука, – 1977. – 488 с.*
18. *Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.*

Поступила 28.02.2003

БЕЛОУС Наталья Валентиновна, канд. техн. наук, доцент, доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов – методы оптимизации, искусственный интеллект, дискретная математика.

СМЕЛЯКОВА Анастасия Сергеевна, студентка Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов – вычислительная геометрия.