УДК 623.62

КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАЗМЕ И ПОТОКИ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

д.ф.-м.н. В.И. Карась, к.ф.-м.н. В.Е. Новиков,
к.т.н. Г.Ф. Коняхин, к.т.н. А.М. Сотников

Присутствие источников и стоков приводит к формированию неравновесного состояния в пространственно однородных системах, обладающего степенными асимптотиками, соответствующими постоянному потоку в фазовом пространстве. В работе разрабатывается неэкстенсивная термодинамика неравновесной твердотельной плазмы с источниками и стоками и приведена зависимость потока в фазовом пространстве от параметра неэкстенсивности термодинамики Тсаллиса. Приведена гиперболическая система уравнений для функции распределения и потока в фазовом пространстве.

Введение. В системах с мощными источниками частиц и излучений особенно важным является изучение стационарных распределений, которые служат аналогами равновесных распределений. Присутствие источников и стоков может вести к формированию неравновесного состояния в пространственно однородных системах, обладающего степенными асимптотиками и квазипостоянными потоками в фазовом пространстве. В таких системах приближение локального равновесия неприменимо. В работе изучены асимптотические свойства неравновесных состояний и показана их связь с неэкстенсивной термодинамикой Тсаллиса, получена зависимость параметра неэкстенсивности от потока в фазовом пространстве и интенсивностей источников и стоков.

Анализ литературы. Квазистационарные неравновесные состояния систем частиц могут быть изучены с помощью решения кинетических уравнений, учитывающих наличие источников и стоков частиц. Существование степенных распределений частиц по энергии было показано впервые теоретически в [2], а экспериментально в [3] . В работе [2] было показано с помощью преобразований подобия, что кинетическое уравнение Больцмана для пространственно однородных систем имеет точные степенные стационарные решения. В работах также было показано с помощью прямых вычислений интеграла столкновений Больцмана и Ландау, что степенные распределения

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon)^{-s}, \tag{1}$$

где s – показатель степени; $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ – энергия частиц; v – скорость частиц; A – константа, являются стационарными решениями кинетических уравнений, обращающими потоки частиц или энергии в фазовом пространстве в ненулевые константы. Такие состояния частиц подобны колмогоровским спектрам волн в турбулентном состоянии. Причем эти состояния зависят только от интегральных характеристик источника и стока.

В частности, к неравновесным однородным в пространстве системам, имеющим степенную компоненту, относятся электронные подсистемы полупроводников под воздействием электромагнитного поля с энергией кванта порядка запрещенной зоны [4] или электронная подсистема в металлах, находящихся под воздействием постоянных процессов ионизации при распространении альфа-частиц в веществе [3].

В степенных решениях кинетического уравнения Больцмана, полученных в работе [2], показатель степени s зависел лишь от показателя степени зависимости потенциала взаимодействия частиц от взаимного расстояния. В этой работе были также проанализированы как дисперсионные свойства плазмы со степенными распределениями электронов, так и ионизационное равновесие в таких неравновесных стационарных состояниях. В [4] было показано, что наличие двух компонент функции распределения – равновесной и неравновесной – приводит к существованию плазменных колебаний с линейной дисперсией. Наличие таких распределений и плазменных колебаний может быть существенно для многих взаимодействий в плазме полупроводника, в частности, для фононного [5] и плазмонного механизма сверхпроводимости [4].

Точные решения уравнений Больцмана для пространственно однородного газа в случае специальной модели столкновения (газ максвелловских молекул) впервые были получены в [6] и изучались в литературе очень интенсивно [7].

Физическая ценность математических моделей для интеграла столкновения в кинетических уравнениях заключается в том, что кинетические уравнения, с одной стороны, становятся более поддающимися аналитическому анализу, и, с другой стороны, сохраняют присущие полным нелинейным уравнениям существенные свойства типа законов сохранения и H-теоремы.

При исследовании неравновесных состояний электронов в полупроводниковой плазме возможны два существенно отличающихся друг от друга случая. В первом случае источники электронов сосредоточены вблизи энергии Ферми или незначительно превосходят ее, а во втором – энергии, при которых возникают неравновесные электроны в полупроводнике, намного превышают энергию Ферми. В первом случае существенными для электронов являются процессы рассеяния на фононах, а во втором можно учитывать только электрон-электронные столкновения в полупроводниковой плазме.

Цель статьи – рассмотреть кинематику электронов в полупроводниковой плазме и потоки в фазовом пространстве.

Кинетика электронов при взаимодействии с фононами в полупроводниковой плазме. Исследуем сначала особенности стационарных неравновесных распределений электронов в системах с источниками и стоками при взаимодействии электронов с равновесными фононами в твердотельной плазме.

Для описания кинетики электронов используем пространственно однородное нелинейное (за счет учета квантовой статистики) кинетическое уравнение с источниками и стоками [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{\partial}{\partial v}\Pi\{f, v\} + \Psi(v). \tag{2}$$

Для изотропной среды удобно сделать замену переменной $x = v^2/2$, $F(x) = 4\pi\sqrt{2x} f\left(\sqrt{2x}\right)$ (здесь и далее v – скорость частицы, нормированная на среднюю скорость частиц v_{0t} в начальном состоянии).

В этой статье мы рассматриваем важный класс источников – источники, которые локализованы в пространстве энергий $D(x) = Q_i x_i \delta\left(x - x_i\right)$. Стоки часто используются в форме $-v(x)F(x)$. Воспользовавшись этими моделями, запишем выражение, которое описывает источники и стоки в виде

$$\Psi(x) = D(x) - v(x)F(x). \tag{3}$$

Для взаимодействующих заряженных частиц (интеграл столкновений Ландау) выражение для потока в кинетическом уравнении имеет особенно простой вид

$$\Pi\left(\{f\}, v\right) = D(v)\frac{\partial f}{\partial v} + F(v) f(v)\left(1 - f(v)\right), \tag{4}$$

где $D(v)$ – коэффициент диффузии для движения частиц в фазовом пространстве.

В области постоянного потока уравнение для стационарной функции преобразуется в линейное уравнение второго порядка, общее решение которого имеет следующий вид [5]:

$$y(\varepsilon) = C_1 I_v\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right) + C_2 K_v\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right),\ v = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{P}{T^2}},\ f(\varepsilon) = -\frac{T_0}{y(\varepsilon)}\frac{dy(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{5}$$

Константы интегрирования определяются из условия сшивки с равновесными решениями (решениями, соответствующими нулевому потоку) в областях вне инерционного интервала.

Анализ неравновесного решения показывает, что отклонения от равновесия при ненулевых значениях потока сосредоточены в области энергий порядка энергии Ферми – E_F.

В конце эволюции по времени образуются области с квазипостоянным по энергии потоком в фазовом пространстве, а в области постоянства потока образуются квазистепенные участки на функции распределения. Области нулевого потока соответствует равновесная функция Ферми (рис. 1).

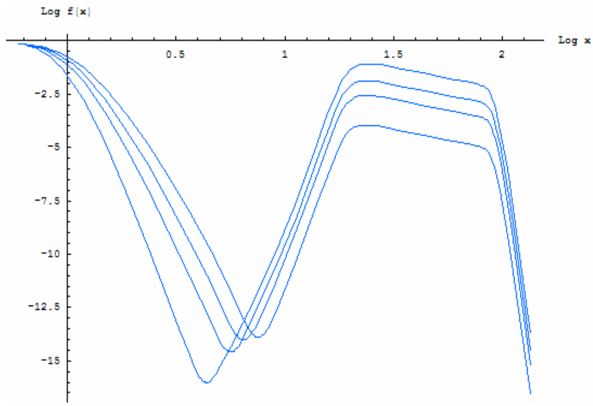

Рис. 1. Графики функций распределения в двойном логарифмическом масштабе при $T_e = 0.1$ (кривые соответствуют P = –1.81, –0.81, –0.4, –0.1)

В неравновесной области функции распределения хорошо аппроксимируются степенными функциями распределения, при этом показатель степени практически не изменяется с ростом интенсивности источника, что хорошо видно из рис. 1, на котором изображена стационарная функция распределения в двойном логарифмическом масштабе между источником и стоком.

Неэкстенсивная термодинамика Тсаллиса. Как уже отмечалось выше, стационарные неравновесные распределения частиц в фазовом пространстве для пространственно однородных систем играют такую же роль, как и распределение Максвелла в термодинамике Гиббса. Наличие таких сильных отклонений от экспоненциальной зависимости должны приводить к серьезным изменениям в термодинамических свойствах систем.

Отметим, что в изучении термодинамики сильно неравновесных систем в последние 15 лет были сделаны большие достижения, также приводящие к негиббсовским распределениям (степенным) в термодинамике. В 1988 г. в работе [9] была предпринята попытка расширить область применения термодинамики и статистической механики на системы, в которых энтропия не обладает свойством экстенсивности.

После работы [9] было изучено большое количество систем, для которых нарушается экстенсивность энтропии и больцмановская термодинамика. Причины, по которым термодинамика Больцмана неприменима, могут быть разными. Это могут быть, например, "эффекты памяти", когда эволюция системы в данный момент времени зависит не только от параметров системы в этот конкретный момент времени, но и от ее параметров некоторое время спустя.

Эффекты памяти могут легко привести к нарушению гипотезы молекулярного хаоса. Эти эффекты означают, что отдельные частицы перед столкновением "помнят" друг друга, их движение не является полностью нескоррелированным, и необходимы уточнения термодинамических соотношений с учетом дополнительных корреляций. Формально, Тсаллис взял стандартное выражение для энтропии и функции распределения и вместо логарифма и экспоненты ввел новые функции на основе степенной зависимости:

$$\ln(x) \to \ln_q(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}; \tag{6}$$

$$\exp(x) \to \exp_q(x) = \left(1+(1-q)x\right)^{1/(1-q)} \tag{7}$$

с неким числовым параметром q. Заметим, что при q, стремящемся к 1, $\ln_q(x)$ и $\exp_q(x)$ переходят в обычные логарифм и экспоненту. Новая формула для q-энтропии выглядит так:

$$S_q = -\sum_i p_i^q \ln_q(p_i) = \left(1-\sum_i p_i^q\right) \Big/ (q-1). \tag{8}$$

Если q > –1, то q-энтропия переходит в стандартную больцмановскую энтропию.

Главное следствие такой замены: q-энтропия является уже не экстенсивной функцией. Если всю систему разбить на две независимых подсистемы A и B, то мы получим

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B). \tag{9}$$

Итак, параметр q – это мера неэкстенсивности системы. Как видно, величина q пока ничем не ограничена и может принимать любые вещественные значения, однако некоторые ограничения могут возникнуть в той или иной конкретной задаче.

В работе [10] показано, что условие максимума q-энтропии приводит к степенеподобным функциям:

$$p(\varepsilon) = \exp_q\left(-\left(\varepsilon/T\right)\right). \tag{10}$$

Выбранная функциональная форма q-энтропии достаточно произвольна и ее основной смысл состоит в моделировании неэкстенсивности.

Особенности кинетики электронов в полупроводниковой плазме при энергиях, превышающих энергию Ферми. При изучении релаксации электронов в области больших энергий в полупроводниковой плазме наиболее адекватной является форма кинетического уравнения в виде нелинейного уравнения Фоккер-Планка с интегралом столкновений в форме Ландау. При больших интенсивностях источников необходимо учитывать процессы релаксации потока между столкновениями. Релаксация потока приводит к необходимости переходить от стандартной формы уравнения Фоккер-Планка в виде параболического уравнения к системе уравнений гиперболического типа [11]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{\partial}{\partial v} J\{f, v\} + \Psi(v)\,; \qquad \tau\frac{\partial J}{\partial t} + J = \Pi\left(v, \{f(v)\}\right). \tag{11}$$

Наиболее удобной для анализа является выражение для потока, приведенное к симметричному виду:

$$\Pi\left(v, \{f(v)\}\right) = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\int_0^v \left[f(v)P(x) - f(x)P(v)\right]x^2 dx\,;\ P(v) = 2\int_v^\infty f(x)x dx\,. \tag{12}$$

Вычислим поток (12) в пространстве скоростей для степенеподобной функции (10). Результат вычисления дает функцию

$$\begin{aligned}\Pi(v, q) = A\Bigg(& C_2\, {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{q-1}; \frac{5}{2}; -(q-1)v^2\right) - \\ & -3\left(5C_1 - C_2 \exp_q\left(v^2\right) {}_2F_1\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{q-1}; \frac{7}{2}; -(q-1)v^2\right)\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{13}$$

где константы:

$$A = \frac{(q-1)^2 v^{\frac{q-3}{q-1}}\left(1 + (q-1)v^2\right)^{\frac{1+q}{1-q}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}{15\pi^3\Gamma^2\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)}\,;$$

$$C_1 = v^{\frac{2}{q-1}} + 2(q-1)v^{\frac{2q}{q-1}} + (q-1)^2 v^{2+\frac{2q}{q-1}} -$$

$$
-\left(\frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1-2q}{q-1}}\left(1+\frac{1}{(q-1)v^2}\right)^{\frac{1}{1-q}}\left(\left((q-1)^{-\frac{q}{q-1}}+(q-1)^{-\frac{1}{q-1}}v^2\right)^2\right);
$$

$$
C_2 = 2(q-1)v^{2+\frac{2q}{q-1}}\exp_q\left(v^2\right).
$$

Эта функция представляет собой поверхность в пространстве (v, q), изображенную на рис. 2.

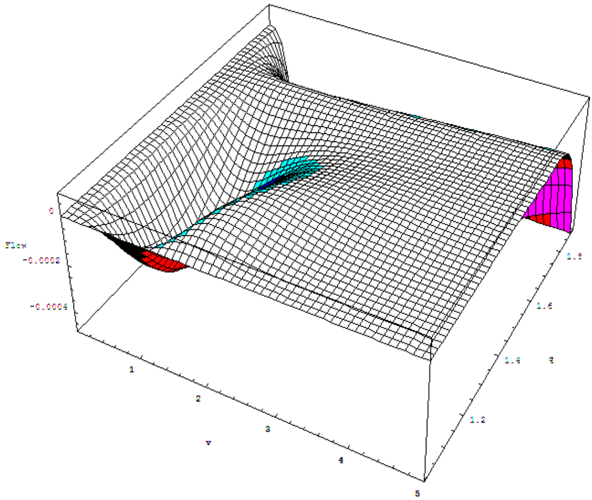

Рис. 2. Зависимость потока частиц в фазовом пространстве от скорости и параметра неэкстенсивности q

Стационарным состояниям соответствуют области, в которых поток не зависит от скорости. Из рисунка видно, что существуют две такие области. Первая область – область q = 1 – соответствует равновесному максвелловскому решению, а вторая область соответствует состояниям со степенными асимптотиками, полученными в работе [2].

Гиперболичность системы уравнений позволяет для численного анализа эволюции в системе эффективно использовать метод прямых. При этом зависимость функции распределения от скорости (или энергии) представляется значениями функции в дискретных точках. Для эволюции значений функции в этих точках со временем легко получить систему нелинейных уравнений в обыкновенных производных по времени.

Отметим, что формальное обобщение равновесной функции распределения Максвелла-Гиббса с помощью функции (12) на неравновесные состояния в случае квантовой статистики становится неоднозначным.

Действительно, равновесную функцию Ферми можно представить в двух эквивалентных формах

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{\varepsilon-E_f}{T}\right)}=\frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon-E_f}{2T}\right)}{\exp\left(\frac{\varepsilon-E_f}{2T}\right)+\exp\left(-\frac{\varepsilon-E_f}{2T}\right)}. \qquad (14)$$

Заменяя экспоненту в этих представлениях на функцию (10), мы получаем два неэквивалентных обобщения на неравновесные состояния для функции Ферми. Обе эти функции при $q\to1$ переходят в функцию распределения Ферми, однако, функция распределения

$$f_q(\varepsilon)=\frac{\exp_q\left(-\frac{\varepsilon-E_f}{2T}\right)}{\exp_q\left(\frac{\varepsilon-E_f}{2T}\right)+\exp_q\left(-\frac{\varepsilon-E_f}{2T}\right)} \qquad (15)$$

при отклонении от равновесия имеет изменения, сосредоточенные вблизи окрестности энергии Ферми, а вторая функция

$$f_q(\varepsilon)=\frac{1}{1+\exp_q\left(\frac{\varepsilon-E_f}{T}\right)} \qquad (16)$$

с ростом неравновесности имеет степенную асимптотику при больших энергиях. Можно убедиться, что функция распределения (15) хорошо аппроксимирует функцию распределения для электронов, формирующуюся при взаимодействии с фононами, а функция распределения (16) аппроксимирует стационарные неравновесные решения кинетического уравнения типа Ландау (13) с учетом поправок, связанных со статистикой Ферми.

Заключение. Как правило, термодинамические соотношения для макроскопических переменных не зависимы от специфического потенциала взаимодействия в системе. Мы надеемся что макроскопические характеристики стационарных неравновесных состояний обладают такими же свойствами универсальности, и точные решения кинетических уравнений с источниками и стоками имеют фундаментальное значение для интерпретации неравновесной статистической термодинамики в открытых системах, далеких от локальных состояний равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трубников Б.А. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 1. – М.: Госатомиздат, 1963. – 98 с.*

2. *Кац А.В., Конторович В.М., Моисеев С.С., Новиков В.Е. Степенные решения кинетического уравнения Больцмана, описывающие распределение частиц с потоками по спектру // Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 21. – 13 с.*
3. *Батракин Е.Н., Залюбовский И.И., Карась В.И., Кононенко С.И. Исследование вторичной электронной эмиссии из тонких пленок Al, Cu, Be, индуцированной пучком протонов 1 MeV // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89. – С. 1098 – 1104.*
4. *Новиков В.Е., Моисеев С.С., Семиноженко В.П. О возможности индуцирования акустических плазменных колебаний в неравновесных полупроводниках // Физика и техника полупроводников. – 1980. – Т. 14, вып. 2. – С. 402 – 403.*
5. *Карась В.И., Новиков В.Е., Моисеев С.С., Семиноженко В.П. Роль локально неравновесных по энергии распределений электронных возбуждений в повышении Тс ФНТ, 1977, 3, 696.*
6. *Бобылёв А.В. О некоторых свойствах уравнений Больцмана для максвелловских молекул // ДАН СССР, 1976. – 20. – 820 с.*
7. *Новиков В.Е., Тур А.В., Яновский В.В. „Скейлинг” в турбулентности и кинетике. Проблемы теоретической физики. – К.: Наук. думка, 1986. – С. 164 –173.*
8. *Новиков В.Е., Моисеев С.С., Тур А.В., Яновский В.В. Универсальные неравновесные распределения фотонов и динамика их образования // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86, вып. 3. – С. 920 – 928.*
9. *C.Tsallis, J.Stat.Phys. 52, 479 (1988).*
10. *Tsallis, Brazilian J.Phys. 29, 1, (1999).*
11. *Сотников А.М., Коняхин Г.Ф., Рыбалка Г.В., Кононенко С.И., Клепиков В.Ф., Литвиненко В.В., Новиков В.Е. Особенности электродинамических свойств фрактальных композитных материалов с α-радиоактивными включениями // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2002. – Вип. 6(22). – С. 142 – 153.*

Поступила 10.10.2003

КАРАСЬ Виталий Игнатьевич*, доктор физ.-мат. наук, начальник лаборатории ХФТИ. Окончил физфак ХГУ в 1970 г. Область научных интересов – кинетическая теория газовой и твердотельной плазмы, взаимодействие ЭМВ с плазмой.*

НОВИКОВ Валерий Евгеньевич*, канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник НТЦ «ЭФО». В 1972 году окончил физфак ХГУ. Область научных интересов – кинетическая теория газовой и твердотельной плазмы, взаимодействие ЭМВ с плазмой.*

КОНЯХИН Григорий Фатеевич*, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры ХВУ. В 1961 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – противодействие системам обнаружения летательных аппаратов.*

СОТНИКОВ Александр Михайлович*, канд. техн. наук, профессор, нач. кафедры ХВУ. В 1980 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – противодействие системам обнаружения летательных аппаратов.*