

ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

к.ф.-м.н. А.М. Стадник, к.ф.-м.н. А.А. Можаяев, А.С. Васильев
(представил д.ф.-м.н. В.К. Иванов)

На основе метода континуальных интегралов в теории распространения волн в случайно-неоднородных средах получены в марковском приближении замкнутые уравнения для пространственно-частотных корреляционных функций волнового поля в среде с дельта-коррелированным полем флуктуаций диэлектрической проницаемости, статистика которого произвольна.

Введение. Континуальные интегралы (КИ), введенные в математику Н. Винером как метод решения задач теории диффузии и броуновского движения, в физической литературе называют также фейнмановскими – в честь Р. Фейнмана, использовавшего их для переформулировки квантовой электродинамики. Впоследствии метод КИ был успешно применен к широкому кругу задач и в настоящее время является одним из наиболее мощных методов теоретической физики [1 – 8].

Применение КИ позволяет обосновать результаты, получаемые другими методами, выяснить пределы их применимости и наметить способ вычисления поправок: если возможно точное решение, то метод КИ дает простой способ его получения. КИ особенно удобны в тех случаях, когда стандартная теория возмущений должна быть модифицирована, так как представляют собой достаточно гибкий математический аппарат, приспособленный для такой перестройки и подсказывающий способ ее конкретной реализации.

На сегодня строгая математическая теория и корректное определение разработаны лишь для некоторых типов КИ. Математические вопросы теории КИ изложены в [9, 10]. Однако в рамках теории возмущений, где достаточно использовать КИ специального вида – гауссовы, формализм КИ является вполне строгим, и полученные с его помощью результаты не нуждаются в дополнительном обосновании.

В теории электромагнетизма метод континуальных интегралов использовался для решения некоторых задач дифракции [11 – 14]. В теории распространения волн в случайно-неоднородных средах он был

впервые применен в работах [15 – 19] и получил дальнейшее развитие в атмосферной оптике – для описания слабых флуктуаций оптического излучения после прохождения через статистически однородную и изотропную турбулентную атмосферу [20 – 23].

Преимуществом метода КИ является легкость включения в рассмотрение анизотропии, регулярной рефракции, неоднородности по одной или нескольким координатам. Это и обусловило плодотворность его применения в акустике океана, где связь между пространственным и временным поведением определяется не гипотезой Тейлора о замороженных флуктуациях, а дисперсионным уравнением для внутренних волн [24, 25].

Используя метод КИ, удалось рассмотреть случай насыщенных флуктуаций, когда нормированная дисперсия интенсивности (индекс мерцаний) с увеличением длины трассы распространения или интенсивности флуктуаций среды достигает своего максимума. Были получены асимптотики высших моментов интенсивности волны, позволяющие судить о распространении вероятностей интенсивности в режиме насыщения [18 – 20].

В данной работе предпринята попытка применения метода КИ для исследования пространственно-частотных корреляций поля волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. В силу чрезвычайной сложности таких задач выражения для пространственно-частотных моментов произвольного порядка обычными методами получить не удастся, и остается вывод или поиск уравнений для этих моментов в надежде, что их удастся решить хотя бы численно.

Целью данной статьи является получение замкнутых уравнений для пространственно-частотных корреляционных функций волнового поля в среде с дельта-коррелированным полем флуктуаций диэлектрической проницаемости, статистика которого произвольна, в приближении марковского случайного процесса.

1. Формулировка задачи и основные допущения. Рассмотрим скалярную величину $E(\vec{r}, t)$ – одну из компонент электромагнитного поля (или давления – в задачах акустики). В предположении узкополосного источника сигнала поле можно представить в виде

$$E(\vec{r}, t) = E_{\omega}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t},$$

где ω – частота волны, а временной масштаб изменения E_{ω} много больше ω^{-1} .

Распространение волн описывается волновым уравнением, в которое входит случайная функция координат:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon_{\omega}(\vec{r}, t) \right] E_{\omega}(\vec{r}, t) = 0.$$

В случае крупномасштабных (по сравнению с длиной волны) неоднородностях среды распространения одним из эффективных методов упрощения волнового уравнения является метод параболического уравнения [26, 27]. В рамках скалярного волнового уравнения Гельмгольца он эквивалентен приближению рассеяния вперед. Это приближение применимо к средам, которые медленно изменяются на масштабах порядка длины волны вдоль некоторого выделенного направления и справедливо для малых углов распространения по отношению к этому направлению.

Кроме того, большинство приближенных методов решения стохастического волнового уравнения предполагает малость флуктуаций $\Delta\varepsilon(\vec{r}; k)$ [26, 28]. Это предположение, либо являясь основой метода (малых возмущений), либо позволяя решить приближенные уравнения (геометрической оптики, метода плавных возмущений) накладывает определенные ограничения на применимость этих методов и не позволяет рассмотреть сильные флуктуации волнового поля.

Другой малый параметр – отношение продольного (вдоль направления распространения волн) радиуса корреляции флуктуаций $\Delta\varepsilon(\vec{r}; k)$ к характерному продольному масштабу флуктуаций поля волны – использует приближение марковского процесса. Дельта-коррелированность поля $\Delta\varepsilon(\vec{r}; k)$ по продольной координате позволяет исходя из параболического уравнения для комплексной амплитуды волн $U(\vec{r})$, но не решая его, получить замкнутые уравнения для моментов $U(\vec{r})$ без предположения о малости флуктуаций амплитуды волны. Поэтому считается, что марковское приближение описывает и сильные флуктуации волнового поля, по крайней мере, тогда, когда можно пренебречь рассеянием назад.

2. Метод континуальных интегралов для решения параболического волнового уравнения. Поскольку поле в среде с крупномасштабными неоднородностями сосредоточено в узком конусе направлений, то его удобно представить в виде возмущенной плоской волны: $E_{\omega}(\vec{r}, t) = U_{\omega}(\vec{r}, t) \exp(ikz)$. При этом комплексная амплитуда волны, распределяющейся вдоль положительного направления оси z в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\omega}(\vec{r}) = 1 + \Delta\varepsilon(\vec{r}; k)$, описывается параболическим уравнением

$$\left[\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k^2} \Delta_{\perp} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon(\vec{\rho}, z; k) \right] U(\vec{\rho}, z; k) = 0, \quad (1)$$

где $\Delta_{\perp}$ – оператор Лапласа по поперечным координатам $\vec{\rho} = (x, y)$. Здесь и ниже для упрощения записи опущена плавная зависимость соответствующих величин от времени (при необходимости ее можно восстановить в конце расчетов). Решение уравнения (1) для произвольных начальных условий записывается как

$$U(\vec{\rho}, z; k) = \int d\vec{\rho}_0 G(\vec{\rho}, z | \vec{\rho}_0, z_0; k) U(\vec{\rho}_0, z_0; k), \quad (2)$$

где функция Грина $G(\vec{\rho}, z | \vec{\rho}_0, z_0; k)$ удовлетворяет по первой паре аргументов тому же уравнению (1), но с начальным условием $G(\vec{\rho}, z | \vec{\rho}_0, z_0; k) = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0)$. Уравнение (1) после очевидных преобразований ($k^{-1} = \hbar$ – постоянная Планка, $\Delta \varepsilon(\vec{r}) = -2V(\vec{r})$) совпадает с двумерным уравнением Шредингера для частицы единичной массы, во внешнем поле $V(\vec{r})$, что позволяет сразу записать выражение для $G(\vec{\rho}, z | \vec{\rho}_0, z_0; k)$ в виде КИ [1]:

$$G(\vec{\rho}, z | \vec{\rho}_0, z_0; k) = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{z_0}^z dz' [\dot{\vec{\eta}}^2(z') + \Delta \varepsilon(\vec{\eta}(z'), z'; k)] \right\} \prod_{z'} d\vec{\eta}(z'). \quad (3)$$

Интегрирование в (3) производится по всем двумерным траекториям, удовлетворяющим граничным условиям $\vec{\eta}(z_0) = \vec{\rho}_0$, $\vec{\eta}(z) = \vec{\rho}$, а нормировочный множитель N находится из условия

$$\frac{1}{N} \int \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{z_0}^z dz' \dot{\vec{\eta}}^2(z') \right\} \prod_{z'} d\vec{\eta}(z') = G_0(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0, z - z_0; k), \quad (4)$$

где $G_0(\vec{\rho}, z; k) = \frac{k}{2\pi i z} \exp \left(\frac{ik}{2z} \vec{\rho}^2 \right)$ – функция Грина уравнения (1) для однородной среды (при $\Delta \varepsilon(\vec{r}; k) = 0$). Для нашей задачи множитель N можно включить в обозначение меры:

$$\frac{1}{N} \prod_{z'} d\vec{\eta}(z') = D\vec{\eta}.$$

Формулу (3) можно понимать как компактную запись бесконечного интеграла

$$G(\vec{p}, z | \vec{p}_0, z_0; k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{k}{2\pi i \Delta \zeta_j} d\vec{\eta}_j \right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \sum_{j=1}^N \Delta \zeta_j \left[\left(\frac{\vec{\eta}_j - \vec{\eta}_{j-1}}{\Delta \zeta_j} \right) + \Delta \varepsilon(\vec{\eta}_{j-1}, \zeta_{j-1}; k) \right] \right\},$$

где $\Delta \zeta_j = \zeta_j - \zeta_{j-1}$, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ – разбиение интервала $[z_0, z]$ таким образом, что $z_0 < \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_n \equiv z$, и $\vec{\eta}_0 \equiv \vec{p}_0$, $\vec{\eta}_N \equiv \vec{p}$.

Поскольку будут рассматриваться пространственно-частотные корреляционные функции, то в (1) – (4) явно выделена зависимость всех величин от частоты посредством $k = k(\omega)$. В дальнейшем мы ограничимся достаточно общим случаем, когда зависимость $\Delta \varepsilon(\vec{r}; k)$ от k является мультипликативной: $\Delta \varepsilon(\vec{r}; k) = \mu(k) \delta \varepsilon(\vec{r})$.

В силу линейности соотношения (2) моменты комплексной амплитуды $U(\vec{r}; k)$ очевидным образом выражаются через моменты функций Грина, удовлетворяя тем же уравнениям, но другим начальным условиям. Поэтому будем рассматривать моменты

$$\Gamma_{n,m}(\{\vec{p}_p, k_p\}, \{\vec{p}'_s, k'_s\}, z) = \langle G_1 \dots G_n G_1^* \dots G_m^* \rangle, \quad (5)$$

где $G_p(\vec{p}_p, z | \vec{p}_{0p}, z_0; k)$, $p = 1, \dots, n$, $G_s^*(\vec{p}'_s, z | \vec{p}_{0s}, z_0; k'_s)$, $s = 1, \dots, m$, а угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций флуктуаций $\Delta \varepsilon(\vec{r}; k)$. Начальным условием для моментов (5) является

$$\Gamma_{n,m}(\{\vec{p}_p, k_p\}, \{\vec{p}'_s, k'_s\}, z_0) = \prod_{p=1}^n \delta(\vec{p}_p - \vec{p}_{0p}) \prod_{s=1}^m \delta(\vec{p}'_s - \vec{p}_{0s}).$$

3. Среднее поле точечного источника. Начиная с простейшего из моментов (5), усредним выражение (3) для $G(\vec{p}, z | \vec{p}_0, z_0; k)$ – по существу, поля точечного источника, расположенного в точке $(\vec{p}_0, z_0)$, и получим

$$\Gamma_{1,0}(\vec{p}, k, z) = \int \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{z_0}^z dz' \dot{\vec{\eta}}^2(z') \right\} \Phi[\lambda_{1,0}] D\vec{\eta}, \quad (6)$$

где

$$\lambda_{1,0}(\vec{p}, z) = \frac{1}{2} k \mu(k) h(z' - z_0) h(z - z') \delta(\vec{p}' - \vec{\eta}(z')); \quad (7)$$

$h(z)$ – ступенчатая функция Хевисайда, а $\Phi[\lambda] = \left\langle \exp \left[i \int d\vec{r} \delta\epsilon(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) \right] \right\rangle$ – характеристический функционал случайного поля $\delta\epsilon(\vec{r})$.

Как известно [26, 28], и как видно из (6), для того, чтобы для уравнения моментов $\Gamma_{n,m}$ были замкнутыми, поле $\delta\epsilon(\vec{r})$ должно быть дельта-коррелированным по z , т.е. его кумулянты имеют вид дельта-функций по всем z -аргументам:

$$K_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = K_n(\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_n, z_1) \delta(z_1 - z_2) \dots \delta(z_{n-1} - z_n).$$

Характеристический функционал представляется тогда в виде

$$\Phi[\lambda] = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dz' \dot{\theta}_z, [\lambda] \right\}, \quad (8)$$

где

$$\dot{\theta}_{z'}[\lambda] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\vec{\rho}_1 \dots d\vec{\rho}_n K_n(\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_n, z_1) \lambda(\vec{\rho}_1, z') \dots \lambda(\vec{\rho}_n, z'). \quad (9)$$

Как видно из (9), $\dot{\theta}_{z'}[\lambda]$ является на самом деле функционалом от $\lambda(\vec{\rho}', z')$ как функции только $\vec{\rho}'$, а зависимость от z' входит параметрически (такое обозначение введено для удобства сравнения с результатами [28, 29]).

Подставляя (7) в (9), а затем в (6), получаем

$$\Gamma_{1,0}(\vec{\rho}, k, z) = \int \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{z_0}^z dz' \left[\dot{\vec{\eta}}^2(z') + \delta\epsilon_{\text{эф}}(\vec{\eta}(z'), z', k) \right] \right\} D\vec{\eta}, \quad (10)$$

где

$$\delta\epsilon_{\text{эф}}(\vec{\rho}, z) = \frac{2}{ik} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{ik}{2} \mu(k) \right]^n K_n(\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_n, z). \quad (11)$$

Сравнивая (10) с (3), легко видеть, что $\Gamma_{1,0}(\vec{\rho}, k, z)$ удовлетворяет уравнению (1), в котором $\delta\epsilon(\vec{r}, z)$ заменено на $\delta\epsilon_{\text{эф}}(\vec{\rho}, z)$. Если флуктуации диэлектрической проницаемости являются однородными, то $K_n(\vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_n, z_1) = K_n$ и выражение (11) уже также не зависит от координат:

$$\delta\epsilon_{\text{эф}} = \frac{2}{ik} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{ik}{2} \mu(k) \right]^n K_n = \text{const}. \quad (12)$$

Тогда соответствующий множитель в (10) можно вынести из-под знака континуального интеграла и, с учетом (4), получить

$$\Gamma_{1,0}(\vec{\rho}, k, z) = G_0(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0 | z - z_0; k) \exp \left[\frac{ik}{2} \delta \varepsilon_{\text{эф}}(z - z_0) \right]. \quad (13)$$

Как легко показать, $\text{Im} \delta \varepsilon_{\text{эф}} > 0$ и, следовательно, формула (13) описывает экспоненциальное затухание когерентной составляющей поля волны при распространении в случайно-неоднородной среде.

Выражение (13) можно получить и непосредственно, решая уравнение для $\Gamma_{1,0}(\vec{\rho}, k, z)$ вида (11), в котором $\delta \varepsilon_{\text{эф}}$ дается формулой (12).

4. Уравнения для корреляционных функций $\Gamma_{1,1}$. Для получения $\Gamma_{1,1}$ усредним произведение двух функций Грина $G_1 G_2^*$, для каждой из которых используем выражение в виде КИ (3). В результате получим

$$\Gamma_{1,1}(\vec{\rho}_1, k_1, \vec{\rho}_2, k_2, z) = \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{z_0}^z dz' [k_1 \dot{\vec{\eta}}_1^2(z') - k_2 \dot{\vec{\eta}}_2^2(z')] \right\} \Phi[\lambda_{1,1}] D\vec{\eta}_1 D\vec{\eta}_2, \quad (14)$$

где интегрирование ведется по двумерным траекториям с граничными условиями $\vec{\eta}_1(z_0) = \vec{\rho}_{01}$, $\vec{\eta}_2(z_0) = \vec{\rho}_{02}$, $\vec{\eta}_1(z) = \vec{\rho}_1$, $\vec{\eta}_2(z) = \vec{\rho}_2$, а функция

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1}(\vec{\rho}', z') &= \frac{1}{2} h(z' - z_0) h(z - z') \times \\ &\times [k_1 \mu(k_1) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_1(z')) - k_2 \mu(k_2) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_2(z'))]. \end{aligned} \quad (15)$$

После подстановки (15) в (9) имеем

$$\Phi[\lambda_{1,1}] = \exp \left\{ \int_{z_0}^z dz' \dot{\theta}_{z'} \left[\frac{1}{2} k_1 \mu(k_1) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_1(z')) - \frac{1}{2} k_2 \mu(k_2) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_2(z')) \right] \right\}. \quad (16)$$

Выражение (14) с учетом (16) дает окончательный результат для $\Gamma_{1,1}$ в форме КИ, по виду которого сразу выписывается уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{k_1} \Delta_{\perp 1} - \frac{1}{k_2} \Delta_{\perp 2} \right) - Q(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z; k_1, k_2) \right] \Gamma_{1,1}(\vec{\rho}_1, k_1, \vec{\rho}_2, k_2, z) = 0, \quad (17)$$

где $Q(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z; k_1, k_2) = \dot{\theta}_z \left[\frac{k_1}{2} \mu(k_1) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_1) - \frac{k_1}{2} \mu(k_2) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_2) \right]$; $\Delta_{\perp 1}$,

$\Delta_{\perp 2}$ – поперечный лапласиан по координатам $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$.

5. Уравнения для корреляционных функций произвольного порядка. Без существенных усложнений можно получить и уравнение для моментов произвольного порядка (5). Усредняя произведение

$G_1 \dots G_n G_1^* \dots G_m^*$ и снова используя для каждого из сомножителей представление в виде КИ (3), получим

$$\Gamma_{n,m} = \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{z_0}^z dz' \left[\sum_{p=1}^n k_p \dot{\eta}_p^2(z') - \sum_{s=1}^m k'_s \dot{\eta}'_s{}^2(z') \right] \right\} \Phi[\lambda_{n,m}] D\vec{\eta} D\vec{\eta}', \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m}(\vec{\rho}', z') &= \frac{1}{2} h(z' - z_0) h(z - z') \times \\ &\times \left[\sum_{p=1}^n k_p \mu(k_p) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_p(z')) - \sum_{s=1}^m k'_s \mu(k'_s) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_s(z')) \right], \\ D\vec{\eta} &= D\vec{\eta}_1 \dots D\vec{\eta}_n, \quad D\vec{\eta}' = D\vec{\eta}'_1 \dots D\vec{\eta}'_m, \end{aligned} \quad (19)$$

а интегрирование производится по всем двумерным траекториям со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \vec{\eta}_p(z_0) &= \vec{\rho}_{op}, \quad \vec{\eta}_p(z) = \vec{\rho}_p, \quad p = 1, \dots, n; \\ \vec{\eta}'_s(z_0) &= \vec{\rho}'_{os}, \quad \vec{\eta}'_s(z) = \vec{\rho}'_s, \quad s = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Подставляя (19) в (8), получим

$$\begin{aligned} \Phi[\lambda_{n,m}] &= \\ &= \exp \left\{ \int_{z_0}^z dz' \dot{Q}_{z'} \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n k_p \mu(k_p) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_p(z')) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m k'_s \mu(k'_s) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}'_s(z')) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Формула (18) с учетом (20) дает выражение для $\Gamma_{n,m}$ в форме КИ, по виду которого можно сразу записать соответствующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{n,m}}{\partial z} &= \frac{i}{2} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{k_p} \Delta_{\perp p} - \sum_{s=1}^m \frac{1}{k'_s} \Delta'_{\perp s} \right) \Gamma_{n,m} + \\ &+ \dot{Q}_z \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n k_p \mu(k_p) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_p) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m k'_s \mu(k'_s) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}'_s) \right] \Gamma_{n,m}. \end{aligned} \quad (21)$$

6. Частные случаи. Полагая в (21) $k_1 = \dots = k_n = k'_1 = \dots = k'_m = k$, придем к уравнениям для пространственных корреляционных функций [29]. В частном случае гауссова случайного поля $\delta\epsilon(\vec{r})$ уравнения (21) ранее были получены в [31,32].

Уравнения (21) очень сложны и, в отличие от случая пространственных корреляционных функций, аналитически неразрешимы уже начиная со случая $n = m = 1$ (17).

Для статистически однородного по поперечным координатам поля $\delta\epsilon(\vec{r})$, когда $Q(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z; k_1, k_2) = Q(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, z; k_1, k_2)$, функцию $\Gamma_{1,1}$ можно только факторизовать. Для этого в континуальном интеграле (14) сделаем замену переменных $\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2$, $\vec{\xi} = \frac{k_1 \vec{\eta}_1 - k_2 \vec{\eta}_2}{k_1 - k_2}$. Теперь переменные интегрирования в (14) разделяются:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,1}(\vec{\rho}_1, k_1, \vec{\rho}_2, k_2, z) = & \int \exp \left\{ \frac{i(k_1 - k_2)}{2} \int_{z_0}^z dz' \dot{\vec{\xi}}^2(z') \right\} d\vec{\xi} \times \\ & \times \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{z_0}^z dz' \left[\frac{k_1 k_2}{(k_1 - k_2)} \dot{\vec{\eta}}^2(z') - \frac{2}{i} Q(\vec{\eta}(z'), z'; k_1, k_2) \right] \right\} D\vec{\eta}, \end{aligned} \quad (22)$$

где траектории $\vec{\eta}(z')$ и $\vec{\xi}(z')$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(z_0) &= \vec{\rho}_{01} - \vec{\rho}_{02}; \quad \vec{\eta}(z) = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2; \\ \vec{\xi}(z_0) &= \frac{k_1 \vec{\rho}_{01} - k_2 \vec{\rho}_{02}}{k_1 - k_2}; \quad \vec{\xi}(z) = \frac{k_1 \vec{\rho}_1 - k_2 \vec{\rho}_2}{k_1 - k_2}. \end{aligned}$$

С учетом (4) выражение (22) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,1}(\vec{\rho}_1, k_1, \vec{\rho}_2, k_2; z) = \\ = G_0 \left(\frac{k_1(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_{01}) - k_2(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_{02})}{k_1 - k_2}, z - z_0, k_1 - k_2 \right) f(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, z; k_1, k_2), \end{aligned}$$

где функция $f(\vec{\rho}, z; k_1, k_2)$ удовлетворяет следующим уравнению и начальному условию

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \Delta_{\perp} - Q(\vec{\rho}, z; k_1, k_2) \right] f(\vec{\rho}, z; k_1, k_2) = 0; \\ f|_{z=z_0} = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{01} + \vec{\rho}_{02}). \end{cases}$$

7. Обсуждение. Уравнения для моментов можно получить и другим, несколько более громоздким путем – преобразуя в интегро-дифференциальные и усредняя соответствующие стохастические уравнения, используя затем условие дельта-коррелированности для расщепления возникающих средних и, наконец, переходя обратно к дифференциальной форме записи. Даже последний шаг для пространственных корреляционных моментов явился в свое время нетривиальной задачей.

Кроме того, при традиционном подходе использование обобщений формулы Фуруцу–Новикова вносит дополнительные трудности, суть которых в следующем. В физических задачах, описываемых системой дифференциальных уравнений первого порядка по выделенной (будем называть ее временной) переменной t с начальными условиями $t = 0$, статистические свойства решения в момент t определяются статистическими характеристиками случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t, \lambda] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \lambda(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае рассчитанные по формуле Фуруцу–Новикова средние $\langle z(t') R[z] \rangle$ ($R[z]$ – некий функционал от $z(T)$) претерпевают разрыв в точке $t' = t$, обусловленный некоммутативностью операций предельного перехода $t' \rightarrow t$ и разложения в функциональный ряд Тейлора.

Сложность и трудность решения уравнений для моментов возрастает с ростом их порядка: если уравнения даже для пространственных функций когерентности первого $\Gamma_{1,0}$ и второго $\Gamma_{1,1}$ порядков решаются в общем виде, то аналитическое решение уравнения для более высоких моментов получить уже не удастся.

Использование КИ позволяет просто записывать как решения уравнений любого порядка (хотя конечно запись решений в виде КИ является перенесением трудностей из одной области – решения уравнений в частных производных в другую, т.к. точно вычисляются КИ лишь специального вида – гауссовы), так и выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями, избегая при этом введения лишних параметров.

Так, например, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности $\Gamma_{2,2}$, с помощью которого затем найти средний квадрат интенсивности $\langle I^2(\vec{r}, z) \rangle$. Однако, как уже указывалось, аналитически соответствующее уравнение не решается и содержит много излишних параметров, в то время как представление $\langle I^2(\vec{r}, z) \rangle$ в виде КИ этих параметров не содержит. Поэтому такая запись полезна для изучения асимптотических характеристик распределения вероятностей интенсивности.

Кроме того, существует ряд задач (например, об отражении волны от препятствий в случайно-неоднородной среде [28]), в которых, по-видимому, только функциональная запись решения позволяет получить ответ.

Как известно, вне рамок марковского приближения, из уравнения (1) удастся получить лишь цепочку связанных уравнений для статистических моментов поля $U(\vec{r})$, в уравнения для низших моментов обязательно входят моменты более высоких порядков. Трудность решения этой цепочки уравнений связана с трудностью вычисления КИ общего вида.

Обычно для расщепления цепочки и получения замкнутых уравнений для моментов данного порядка принимаются определенные статистические гипотезы о решении. При формулировке задачи в терминах КИ такие статистические гипотезы проявляются как некоторые приближения для подынтегрального выражения, что позволяет проследить за характером приближений и определить пределы их применимости.

Заключение. Таким образом, применение КИ сводит процесс вывода уравнений пространственно-временной корреляции к простому алгоритму: сначала получают само решение в форме КИ, а затем прямо по его виду записывают и уравнение. Разработка как приближенных аналитических (типа ВКБ-приближения), так и численных [33 – 37] методов вычисления КИ делает их дальнейшее применение весьма привлекательным.

Авторы выражают признательность д.ф.-м.н. Виктору Кузьмичу Иванову за постоянное внимание и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман Р., Хиббс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям.* – М.: Мир, 1968. – 382 с.
2. Васильев А.Н. *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.* – Л.: ЛГУ, 1976. – 294 с.
3. Мазманишвили А.С. *Континуальное интегрирование как метод решения физических задач.* – К.: Наук. думка, 1987. – 224 с.
4. Roepstor G. *Path Integral Approach to Quantum Physics*, Springer, Heidelberg, 1996. – 220 p.
5. *Functional Integration: Basics and Applications*, C. DeWitt-Morette (Ed.), Plenum Press, New York, 1997.
6. Grosche G., Steiner F. *Handbook of Feynman Path Integrals.* – Springer, Berlin, 1998. – 422 p.
7. Chaichian M., Demichev A. *Path Integrals in Physics. Vol. I.* – IOP Publishing, London, 2001. – 352 p.

8. Kleinert H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, – World Scientific Publishing Co., Singapore, 2004. – 1300 p.
9. LaChapelle J. Path integral solution of linear second order partial differential equations I: the general construction // *Ann. Phys.* – 2004. – 314. – P. 362 – 395.
10. LaChapelle J. Path integral solution of linear second order partial differential equations II: elliptic, parabolic, and hyperbolic cases // *Ann. Phys.* – 2004. – 314. – P. 396 – 424.
11. Eve J. The use of path integrals in guided wave theory // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1976. – V. 347, pt. A. – P. 405 – 417.
12. Татарский В. Н. Представление решений некоторых дифракционных задач в форме гауссовых континуальных интегралов // *Докл. АН СССР.* – 1978. – 241, № 2. – С. 333 – 336.
13. Constantinou J. Path-integral analysis of tapered, graded-index waveguides // *J. Opt. Soc. Amer. A.* – Aug. 1991. – V. 8. – P. 1240 – 1244.
14. Nevels R.D. Miller J.A. Miller R.E. A path integral time-domain method for electromagnetic scattering // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – Apr. 2000. – V. 48. – P. 565 – 573.
15. Кляцкин В.И., Татарский В.И. О приближении параболического уравнения в задачах распространения волн в среде со случайными неоднородностями // *ЖЭТФ.* – 1970. – 58, №2. – С. 624 – 634.
16. Chow P.L. Application of function space integrals to problem on wave propagation in random media // *J. Math. Phys.* – 1972. – 13, № 8. – P. 1224 – 1236.
17. Chow P.L. A functional phase space integral method and application to the laser beam propagation in random media // *J. Statist. Phys.* – 1975. – 12, № 2. – P. 93 – 109.
18. Dashen R. Path integrals for waves in random media // *J. Math. Phys.* – 1979. – 20, № 5. – P. 894 – 920.
19. Заворотный В.У., Кляцкин В.И., Татарский В.И. Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах // *ЖЭТФ.* – 1977. – 73, № 2. – С. 481 – 497.
20. Tatarskii V.I., Zavorotnyi V.U. Strong fluctuations in light propagation in a randomly inhomogeneous medium // *Progr. Opt.* – 1980. – 18. – P. 204 – 256.
21. Besieris J. Wave-kinetic method, phase-space path integrals, and stochastic wave propagation // *J. Opt. Soc. Amer. A.* – Dec. 1985. – V. 2. – P. 2092 – 2099.
22. Yeh K.C., Lin K.H., Wang Y. Effect of irregular terrain on waves – a stochastic approach // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – Feb. 2001. – V. 49. – P. 250 – 259.
23. Булдаков В.М. Применение континуальных интегралов для исследования распространения лазерного излучения в случайно-неоднородных средах // *Оптика атмосферы и океана.* – 1991. – 4, № 6. – С. 599.
24. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. – М.: Мир, 1982. – 329 с.
25. Флатте С.М. Распространение волн в случайно-неоднородных средах: акустика океана // *ТИИЭР.* – 1983. – 71, № 11. – С. 45 – 78.

26. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.П. Случайные поля. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
27. Levy M. *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation*. - London: IEE, 2000. – 348 p.
28. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
29. Кляцкин В.И. К стохастической теории распространения света в среде со случайными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. – 1975. – 18, № 1. – С. 63 – 68.
30. Сабесфельд К.К., Татарский В. И. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов // Докл. АН СССР. – 1978. – 243, № 4. – С. 905 – 908.
31. Ерухимов Л.М., Зарницына И.Г., Кириш П.И. // Изв. Вузов. Радиофизика. – 1973. – 16, № 4. – С. 573.
32. Lee L.C. *Wave propagation in a random medium: A complete set of the moment equations with different wavenumbers*. – J. Math. Phys. – 1974. – 15, № 9. – P. 1431 – 1435.
33. Doll J.D., Coalson R.D., Freeman D.L. *Fourier Path-Integral Monte Carlo Methods: Partial Averaging* // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 55. – P. 1 – 15.
34. Filinov V.S. *Calculation of the Feynman integrals by means of the Monte Carlo method* // Nucl. Phys. B. – 1986. – V. 271. – P. 717 – 725.
35. Bond S.D., Laird B.B., Leimkuhler B.J. *On the approximation of Feynman-Kac path integrals* // J. Comp. Phys. – 2003. – V. 185. – P. 472 – 483.
36. Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
37. Егоров А.Д., Соболевский А.Ч., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.

Поступила 16.12.2004

СТАДНИК Александр Михайлович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник Института радиофизики и электроники НАН Украины. В 1971 году окончил физфак ХГУ. Область научных исследований – распространение волн в случайно-неоднородных средах, математические методы оптимальной обработки сигналов, дистанционное зондирование Земли.

МОЖАЕВ Александр Александрович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник ХУ ВС. Область научных исследований – нелинейное взаимодействие радиоволн в различных средах, управление процессами в информационных системах.

ВАСИЛЬЕВ Александр Сергеевич, инженер ИРЭ НАНУ. В 2001 году окончил ХНУ. Область научных исследований – математическое моделирование, дистанционное зондирование Земли.