УДК 621.396.96

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦЫ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В АЛГОРИТМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА МНОГОПОЗИЦИОННОЙ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ИЗБЫТОЧНОСТИ ИНФОРМАЦИИ

Ю.В. Кулявец[1], О.И. Богатов[1], Д.П. Лабенко[1], В.А. Молодцов[2]
([1]Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков,
[2]Харьковский университет Воздушных Сил)

Получено аналитическое выражение для корреляционной матрицы ошибок определения неизменяющейся матрицы весовых коэффициентов при использовании оценок корреляционных матриц ошибок нормально распределенного вектора состояния объекта, полученного одновременно различными независимыми измерителями. Показано, что точность оценивания матрицы весовых коэффициентов зависит как от точности измерителей координат, так и от длины выборки, взятой для определения корреляционных матриц ошибок оценивания местоположения объекта.

многопозиционная радиолокационная система, пассивная локация, корреляционная матрица ошибок, вектор состояния объекта

Постановка проблемы и анализ литературы. В многопозиционных системах локации размерность пространства параметров Θ объекта (разностей дальностей или дальностей от объекта до пунктов приема, азимутов в пунктах приема и т.д.), отображаемого в пространство его геометрических (декартовых или полярных) координат, часто превышает минимально достаточную (т.е. является избыточной) для определения местоположения объекта, характеризуемого вектором состояния α. Например, в двухпозиционной системе пассивной локации возможно измерение двух азимутов объекта в пунктах приема и разности дальностей от объекта до пунктов приема. Для определения геометрических координат объекта на плоскости достаточно использовать либо два азимута, либо один из азимутов и разность дальностей [2, 9]. В этом случае одно из первичных измерений является избыточным. При наличии избыточности измерений задача определения координат объекта сводится к нахождению оптимальных алгоритмов объединения оценок, полученных одновременно различными измерителями. В [2] было показано, что решение задачи оптимального использования оценок одного и того же вектора состояния, сводится к последовательному применению алгоритма фильтрации оценок. Там же показано, что результирующая оценка местоположения объекта $\hat{\alpha}_p$, при условии независимости оценок, полученных различными измерителями, представляет собой весовую сумму оценок вектора состояния одного

$\hat{\alpha}_1 = f_1\left(\hat{\Theta}_1\right)$ и другого измерителя $\hat{\alpha}_2 = f_2\left(\hat{\Theta}_2\right)$:

$$\hat{\alpha}_p = \hat{\alpha}_1 + C_p^{-1}C_2\left(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1\right) = \hat{\alpha}_1 + W\left(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1\right) = \left(I - W\right)\hat{\alpha}_1 + W\hat{\alpha}_2; \qquad (1)$$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2, \qquad (2)$$

где $\mathbf{C}_\mu$ – матрица точности оценок μ-го измерителя, обратная корреляционной матрице ошибок (КМО) оценивания координат объекта $\mathbf{C}_\mu^{-1}$ ($\mu = p, 1, 2$); $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Известно [2, 9, 10], что точность оценивания координат объекта многопозиционной системой (т.е. матрица точности $\mathbf{C}_\mu$) зависит не только от точности и состава первично измеряемых параметров сигнала, но и от местоположения объекта. Тогда и матрица весовых коэффициентов (МВК) $\mathbf{W} = \mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_2$, входящая в выражение (1) для определения результирующей оценки $\hat{\alpha}_p$, также зависит от местоположения объекта, которое и требуется определить. Поэтому прямое применение алгоритма (1) представляется затруднительным.

В [6] проведен анализ влияния точности определения оценки МВК $\widehat{\mathbf{W}}$ (независимо от методов ее получения) на точность результирующей оценки $\hat{\alpha}_p$. Там же показано, что точность $\hat{\alpha}_p$ зависит не только от точности оценок $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$, но и от точности оценивания МВК $\widehat{\mathbf{W}}$. Т.е. ошибки определения МВК $\widehat{\mathbf{W}}$ сказываются на точность результирующей оценки $\hat{\alpha}_p$. Однако, возможные методы получения МВК не рассмотрены и, как следствие, не приведены соотношения, определяющие точность оценки МВК. Одним из возможных методов получення оценки МВК $\widehat{\mathbf{W}}$ представляется ее расчет по оценкам КМО измерений $\widehat{\mathbf{C}}_1^{-1}$ и $\widehat{\mathbf{C}}_2^{-1}$. При условии, что за время оценивания координаты объекта на изменяются, КМО $\widehat{\mathbf{C}}_\mu^{-1}$ может быть определена на основе n независимых дискретных выборок оценок вектора состояния объекта $\hat{\alpha}_\mu$ ($\mu = 1, 2$):

$$\widehat{\mathbf{C}}_\mu^{-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\hat{\alpha}_{\mu s} - M\left[\hat{\alpha}_\mu\right]\right)\left(\hat{\alpha}_{\mu s} - M\left[\hat{\alpha}_\mu\right]\right)^T. \qquad (3)$$

Цель статьи. Провести анализ точности оценивания неизменяющейся матрицы весовых коэффициентов на основе использования оценок корреляционных матриц ошибок измерений вектора состояния объекта, полученных одновременно различными независимыми измерителями.

Изложение основного материала. Считаем, что оценка МВК $\widehat{\mathbf{W}}$ определяется на основе оценок КМО $\widehat{\mathbf{C}}_1^{-1}$ и $\widehat{\mathbf{C}}_2^{-1}$ измерений координат объекта независимых измерителей. Для этого случая получение статистических характеристик многомерного закона распределения МВК представляет собой достаточно сложную статистическую задачу. В случае нормального распределения данных [4], оценки их математического ожидания и дисперсии (КМО) являются независимыми. Этот факт позволяет строить независимый измеритель дисперсии вектора состояния объекта. При этом [1, 7] плотность распределения оценки КМО размерности $m \times m$ при условии независимости и одинакового (нормального $N\left(0, \mathbf{C}^{-1}\right)$) распределения n выборок имеет вид

$$dF = \left|\widehat{\mathbf{C}}^{-1}\right|^{\frac{1}{2}(n-m-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left(\widehat{\mathbf{C}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\right) \Bigg/ \left(2^{\frac{1}{2}nm}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}n}\prod_{s=1}^{m}\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-s)\right]\right),$$

где $\widehat{\mathbf{C}}^{-1}$ – положительно определенная матрица, оцениваемая согласно (3), и $n > m$; $\boldsymbol{\Sigma}$ – КМО определения элементов матрицы $\widehat{\mathbf{C}}^{-1}$.

Моменты элементов $\widehat{\mathbf{C}}^{-1}$ могут быть получены как из характеристической функции, так и из первоначального нормального распределения [1].

Математическое ожидание $\widehat{\mathbf{C}}_{ij}^{-1}$ равно

$$M\left[\widehat{\mathbf{C}}_{ij}^{-1}\right] = M\left[\frac{1}{n-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\hat{\alpha}_{is} - M\left[\hat{\alpha}_i\right]\right)\left(\hat{\alpha}_{js} - M\left[\hat{\alpha}_j\right]\right)\right] =$$

$$= M\left[\frac{1}{n-1}\sum_{s=1}^{n}\sigma_{ijs}\right] = \frac{n}{n-1}\sigma_{ij},$$

где σ_{ij} – ij-й элемент матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$, а ковариация между $\widehat{\mathbf{C}}_{ij}^{-1}$ и $\widehat{\mathbf{C}}_{kl}^{-1}$ имеет вид [1]

$$M\left[\left(\widehat{\mathbf{C}}_{ij}^{-1} - \frac{n}{n-1}\sigma_{ij}\right)\left(\widehat{\mathbf{C}}_{ql}^{-1} - \frac{n}{n-1}\sigma_{ql}\right)\right] = \frac{n}{(n-1)^2}\left(\sigma_{iq}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jq}\right). \quad (4)$$

Если $i = q$ и $j = 1$, то последнее выражение определяет дисперсию $\widehat{\mathbf{C}}_{ij}^{-1}$

$$M\left[\left(\widehat{\mathbf{C}}_{ij}^{-1} - \frac{n}{n-1}\sigma_{ij}\right)^2\right] = \frac{n}{(n-1)^2}\left(\sigma_{ij}^2 + \sigma_{ii}\sigma_{jj}\right). \quad (5)$$

В [4] приводится выражение для плотности распределения отношения оценок дисперсий двух независимых случайных процессов, а также и для дисперсии такого отношения. Отношение оценок дисперсий по форме является одномерным аналогом оценки МВК. Однако существующая зависимость МВК от корреляционной матрицы ошибок измерений не позволяет применить предположение о независимости входящих в ее формулу компонентов.

Таким образом, получение аналитического выражения для КМО оценки МВК наталкивается на определенные трудности. Однако, вводя предположения о малости ошибок и наличии априорной информации о некоторой окрестности истинного значения МВК, возможно в этой окрестности нелинейные зависимости аппроксимировать линейными. Основное достоинство метода линеаризации состоит в том, что он позволяет получить в явном виде оптимальную (в данном случае максимально правдоподобную) оценку МВК и ее КМО.

Как было определено ранее МВК связана с КМО оценивания одной из зависимостей вида

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{-1}\mathbf{C}_2 = \left(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{-1}\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p}} - \mathbf{C}_1\right) = \mathbf{I} - \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{-1}\mathbf{C}_1 . \qquad (6)$$

Использование для определения МВК оценок КМО измерений приводит к соотношению $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{C}}_{\mathrm{p}}^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_2 = \left(\widehat{\mathbf{C}}_1 + \widehat{\mathbf{C}}_2\right)^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_2$.

При оценивании МВК необходимо учитывать характер взаимосвязи ее элементов и характер ее изменения во времени. Считаем, что за время измерения местоположение объекта не изменяется. Следовательно, проводится оценивание не изменяющихся во времени элементов МВК $\widehat{\mathbf{W}}$ по результатам дискретного наблюдения. Случайные изменения МВК обуславливаются ошибками измерения координат объекта. Модель изменения квадратной матрицы $\widehat{\mathbf{W}}$ размерности $\mathrm{m} \times \mathrm{m}$ с произвольными вещественными элементами составим "вытянув" ее в вектор-столбец $\widehat{\mathbf{W}}^{\#}$ размера $\mathrm{m}^2 \times 1$, где символ # обозначает операцию "вытягивания" матрицы в вектор-столбец [10]. Тогда последнее выражение можно переписать в виде

$$\widehat{\mathbf{W}}^{\#} = \left(\widehat{\mathbf{C}}_{\mathrm{p}}^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_2\right)^{\#} = \left[\left(\widehat{\mathbf{C}}_1 + \widehat{\mathbf{C}}_2\right)^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_2\right]^{\#} = \mathbf{w}\left(\left[\widehat{\mathbf{C}}_1^{-1}, \widehat{\mathbf{C}}_2^{-1}\right]^{\#}\right) = \mathbf{w}\left(\widehat{\mathbf{W}}_{\mathrm{C}}^{\#}\right).$$

Предполагая, что функция $\mathbf{w}\left(\widehat{\mathbf{W}}_{\mathrm{C}}^{\#}\right)$ на любом достаточно узком участке близка к линейной, представим ее в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{w}\left(\mathbf{W}_{\mathrm{C0}}^{\#}\right)$, сохранив члены порядка не выше первого

$$\widehat{\mathbf{W}}^{\#} = \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_{C0}^{\#}\right) + \mathbf{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_{C}^{\#} - \mathbf{W}_{C0}^{\#}\right), \qquad (7)$$

где $\mathbf{P} = \left\| \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \right\|$ – блочная матрица пересчета КМО $\mathbf{C}_1^{-1}$ и $\mathbf{C}_2^{-1}$ измерителей в МВК $\mathbf{W}$ размерности $m^2 \times 2m^2$, μ-й $(\mu = 1,\ 2)$ блок этой матрицы

$$\mathbf{P}_{\mu} = \frac{\partial \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_{C}^{\#}\right)}{\partial \left(\mathbf{C}_{\mu}^{-1}\right)^{\#}} \qquad (8)$$

представляет собой двумерную матрицу размерности $m^2 \times m^2$. Такое представление матрицы $\mathbf{P}$ обусловлено введенной моделью (7).

Тогда математическое ожидание и КМО расчета МВК размерности $m^2 \times m^2$ записываются соответственно выражениями:

$$\mathbf{W}^{\#} = \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_{C0}^{\#}\right); \qquad (9)$$

$$\mathbf{C}_{W}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{C}_{C}^{-1}\mathbf{P}^{T} = \mathbf{P}_1\mathbf{C}_{C1}^{-1}\mathbf{P}_1^{T} + \mathbf{P}_2\mathbf{C}_{C2}^{-1}\mathbf{P}_2^{T}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{C}_{C}^{-1} = \begin{Vmatrix} \mathbf{C}_{C1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{C2}^{-1} \end{Vmatrix}$ – блочно-диагональная (при условии независимости оценок измерителей) КМО измерения КМО оценивания координат объекта различными измерителями, размерности $2m^2 \times 2m^2$. При этом блоки такой матрицы определяются из соотношения

$$\mathbf{C}_{C\mu}^{-1} = \mathrm{M}\left[\left(\widehat{\mathbf{C}}_{\mu}^{-1} - \mathbf{C}_{\mu}^{-1}\right)^{\#}\left(\widehat{\mathbf{C}}_{\mu}^{-1} - \mathbf{C}_{\mu}^{-1}\right)^{\#T}\right], \quad (\mu = 1,\ 2),$$

а элементы блоков этой матрицы определяются выражениями (4) и (5).

Таким образом, наличие в выражения (10) матрицы $\mathbf{C}_{C}^{-1}$ показывает что точность оценивания МВК зависит, согласно (4) и (5), от количества выборок, взятых для определения оценки КМО измерения координат объекта. Кроме того, число таких выборок должно быть не менее размерности оцениваемой КМО.

Для дальнейшего анализа точности оценивания МВК необходимо получить выражение для матрицы $\mathbf{P}$, т.е. определить производную (8). В общем виде матрица $\mathbf{P}_{\mu} = \dfrac{\partial \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_{C}\right)}{\partial \mathbf{C}_{\mu}^{-1}}$ $(\mu = 1,\ 2)$ есть результат нахождения матрично-матричной производной и является четырехмерной матрицей размерности $m \times m \times m \times m$ [5]. Это приходится учитывать при определении производной (8). Предполагая, что за время измерения координаты объекта не изменяются и используя теоремы о производной произведения матриц и производной обратной матрицы [3], запишем

$$\frac{\partial \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_C\right)}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}} = \mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_1 \frac{\partial \mathbf{C}_1^{-1}}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}\mathbf{C}_1 \mathbf{W} + \mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_2 \frac{\partial \mathbf{C}_2^{-1}}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}\mathbf{C}_2 \mathbf{W} - \mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_2 \frac{\partial \mathbf{C}_2^{-1}}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}\mathbf{C}_2 = $$
$$= \left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right)\frac{\partial \mathbf{C}_1^{-1}}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}\mathbf{C}_1 \mathbf{W} - \mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{C}_2^{-1}}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}\mathbf{C}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right), \left(\mu = 1,\ 2\right). \tag{11}$$

Матрица вида $\dfrac{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}{\partial \mathbf{C}_\mu^{-1}}$ $\left(\mu = 1,\ 2\right)$, входящая в последнее выражение, есть единичная четырехмерная матрица размерности $m \times m \times m \times m$ [5] поскольку производная C_{ij}^{-1} по элементу C_{qg}^{-1} отлична от нуля только при $i = q$ и $j = g$, то есть $\dfrac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial C_{qg}^{-1}} = \delta_{iq}\delta_{jg}$. Поэтому для введенной модели (7) проведем упорядочивание матричной производной [5] следующим образом:

$$\mathbf{P}_\mu = \frac{\partial \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_C^\#\right)}{\partial\left(\mathbf{C}_\mu^{-1}\right)^\#} = \left\| \frac{\partial W_{ij}}{\partial C_{\mu qg}^{-1}} \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{W}^\#}{\partial C_{\mu 11}^{-1}} \quad \frac{\partial \mathbf{W}^\#}{\partial C_{\mu 12}^{-1}} \quad \ldots \quad \frac{\partial \mathbf{W}^\#}{\partial C_{\mu mm}^{-1}} \right\|. \tag{12}$$

Тогда:

$$\frac{\partial \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_C^\#\right)}{\partial C_{1ij}^{-1}} = \frac{\partial \mathbf{W}^\#}{\partial C_{1ij}^{-1}} = \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right)\frac{\partial \mathbf{C}_1^{-1}}{\partial C_{1ij}^{-1}}\mathbf{C}_1 \mathbf{W}\right]^\# = \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right)\mathbf{E}_{ij}\mathbf{C}_1 \mathbf{W}\right]^\#; \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}\left(\mathbf{W}_C^\#\right)}{\partial C_{2ij}^{-1}} = \frac{\partial \mathbf{W}^\#}{\partial C_{2ij}^{-1}} = \left[-\mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{C}_2^{-1}}{\partial C_{2ij}^{-1}}\mathbf{C}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right)\right]^\# = \left[-\mathbf{W}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{C}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right)\right]^\#, \tag{14}$$

где $\mathbf{E}_{ij} = \left\|\delta_{ij}\right\|$ – матрица, ij-й элемент которой равен 1, а все остальные равны 0.

Таким образом, получены выражения для блоков, составляющих матрицу $\mathbf{P}$ пересчета КМО $\mathbf{C}_1^{-1}$ и $\mathbf{C}_2^{-1}$ измерителей в МВК $\mathbf{W}$. Подстановка (13) и (14) в (10) позволяет определить КМО оценивания МВК. На основании (13) и (14) видно, что точность оценивания МВК $\mathbf{W}$ зависит от точности оценок измерителей, определяемой матрицей точности $\mathbf{C}_\mu$ ($\mu = 1,\ 2$).

Точность оценивания координат объекта многопозиционной системой (т.е. матрицы точности $\mathbf{C}_1^{-1}$ и $\mathbf{C}_2^{-1}$) [2, 8 – 10] зависит от точности и состава первично измеряемых параметров сигнала и от местоположения объекта. Следовательно и точность оценивания МВК $\mathbf{W}$, в свою очередь, также будет зависеть от перечисленных выше параметров.

Выводы. Таким образом, точность оценивания МВК на основе использования оценок КМО измерений вектора состояния объекта, полученных одновременно различными независимыми измерителями, зависит как от точности самих измерителей, так и от количества выборок, взятых для определения оценок КМО оценивания местоположения объекта. Кроме того, число таких выборок должно быть не менее размерности оцениваемой КМО. Учет точности оценок измерителей приводит к тому, что точность оценивания МВК в свою очередь будет дополнительно зависеть от параметров влияющих на точность этих оценок. К их числу относятся точность и состав первичных измерений, а также местоположение объекта в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ: Пер. с англ. / Под ред. Б.В.Гнеденко. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.*
2. *Багдасарян С.Т., Хачатуров В.Р. Оптимизация оценивания координат объекта многопозиционной радиолокационной системой при избыточности информации // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т. 37, № 10. – С. 1839 – 1846.*
3. *Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1968. – 576 с.*
4. *Кендал М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ. / Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.:ИЛ, 1973. – 900 с.*
5. *Красногоров С.И. Матричный анализ в задачах отыскания экстремумов. – Ногинск: Научно-исследовательский центр 30 ЦНИИ МО, 1998. – 100 с.*
6. *Кулявец Ю.В., Просов А.В. Влияние ошибок оценивания матрицы весовых коэффициентов на точность результирующей оценки местоположения объекта многопозиционной радиолокационной системой при избыточности информации // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 5. – С. 133 – 138.*
7. *Кучук Г.А. Оценка адекватности сплайновой интерполяции трафика широкополосной цифровой сети интегрального обслуживания // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 5. – С. 149 – 153.*
8. *Кучук Г.А. Оцінка втрат у системах з обмеженим очікуванням // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 4. – С. 133 – 137.*
9. *Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.*
10. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.*

Поступила 25.02.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор О.И. Сухаревский, Объединенный научно-исследовательский институт ВС, Харьков.