УДК 519.852.3

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА НАЗНАЧЕНИЯ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕГО ЦЕЛЕВУЮ ФУНКЦИЮ ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦАХ ЭФФЕКТИВНОСТИ

С.Н. Пискунов, В.М. Решетник, И.Ф. Цапков
(Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков)

Предложены метод и алгоритм нахождения квазиоптимального плана назначения при прямоугольных матрицах эффективности. Разработанный алгоритм позволяет существенно снизить затраты времени и памяти ЭВМ на его реализацию по сравнению с оптимальными методами.

квазиоптимальный план назначения, матрицах эффективности

Постановка задачи. В [1], [3] задача нахождения оптимального назначения сформулирована следующим образом: найти набор параметров назначения $\{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, максимизирующий показатель эффективности (ПЭ)

$$M(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Q_{ij}x_{ij}\ , \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ ; \qquad i = 1, 2, \dots, m\ ; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1\ ; \qquad j = 1, 2, \dots, n\ , \qquad (3)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ i\text{-й исполнитель назначен для} \\ \text{выполнения}\ j\text{-й работы;} \\ 0,\ \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (4)$$

где $Q_{ij} = B_j P_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; B_j – важность j-й работы, $B_j > 0$; P_{ij} – эффективность выполнения j-й работы i-м исполнителем, $P_{ij} \geq 0$; m, n – количество исполнителей и работ соответственно.

Для нахождения оптимального плана назначения, как правило, используют венгерский метод [1], [3]. Венгерским методом получают оптимальный план назначения, минимизирующий ПЭ (1) при квадратной матрице эффективностей (МЭ) $\|Q_{ij}\|$, (m = n). Поэтому задачу максимизации предварительно трансформируют в задачу минимизации; если $m \neq n$, то матрицу эффективности расширяют до квадратной. С этой целью могут вводиться фиктивные работы или фиктивные исполнители, для которых $Q_{ij} = 0$.

Алгоритмы нахождения оптимальных планов сложны [2], [3]. Для их реализации на ЭВМ в реальном масштабе времени требуются значительные затраты времени и объема памяти. **Целью статьи** является разработка более простых в реализации, но эффективных методов и алгоритмов решения задачи назначения при прямоугольных матрицах эффективности.

Постановку задачи нахождения квазиоптимального (близкого по эффективности к оптимальному) плана назначения сформулируем следующим образом:

найти набор параметров назначения $\{x_{ij}\}$, максимизирующий ПЭ (целевую функцию (ЦФ)) (1), и удовлетворяющий следующим системам ограничений:

при $m = n$: (2), (3), (4);

при $m<n$: (2), (4),

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1; \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{5}$$

при $m>n$: (3), (4),

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1; \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

При описании метода и алгоритма воспользуемся отдельными результатами, изложенными авторами в [2], применительно к задаче назначения.

Метод и алгоритм нахождения квазиоптимального плана назначения. При нахождении плана назначения с использованием предлагаемого метода выполняется предварительный этап и не более чем $(m - 1)$ последовательно повторяющихся итераций. Опишем содержание операций для случаев $m = n$; $m < n$, а затем покажем особенности решения задачи при $m > n$.

На предварительном этапе находим максимальные элементы строк матрицы эффективности

$$Q_{ik} = \max_{1 \leq j \leq n} Q_{ij}; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

где k – номер столбца, которому принадлежит максимальный элемент i-й строки, а элементы

$$Q_{ik} \geq Q_{ij}; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j \neq k; \; k \in N, \tag{8}$$

где N – множество номеров столбцов матрицы эффективностей.

Максимальные элементы строк МЭ для наглядности отмечаем знаком (*). Если число столбцов с элементами Q_{ij}^{*}, которые обозначим "b", будет равно пороговому значению

$$b = b_{\text{п}}, \tag{9}$$

где
$$b_{\text{п}} = \min(m, n), \tag{10}$$

то параметры назначения, координаты которых соответствуют координатам Q_{ij}^{*}, будут равны единице. Для параметров назначения выполняются ограничения (2), (4), (5). Следовательно, при $m \le n$ решение в этом случае найдено на предварительном этапе, а найденный план назначения $x_{ij}^{*} = 1$ будет оптимальным [2], что может быть подтверждено путем эквивалентных преобразований. Найденный план назначения максимизирует ПЭ (1), так как выполняется условие (8). Если число столбцов "b" с элементами Q_{ij}^{*} меньше порогового значения (9) (для $m \le n$ величина $b_{\text{п}} = m$ (10)), то в некоторых столбцах будут находиться несколько элементов Q_{ij}^{*}, отдельные же столбцы останутся без таких элементов. Поэтому необходимо выполнить не более $(m - 1)$ итераций, при которых максимальные элементы строк заменяются либо равными им (выполняется условие $Q_{ik} = Q_{ij}, k \ne j$ (8)), либо наиболее близкими по величине элементами строк.

Для поиска координат элемента Q_{i0j0}, который заменит Q_{ik}, используем величину δ_{i0j0}, вычисляемую по следующему правилу:

$$\delta_{i0j0} = \min_{k \in L_2}\{\min_{i \in R_k}\{\min_{l \in L_0}\{Q_{ik} - Q_{il}\}\}\}, \tag{11}$$

где Q_{ik} – максимальный элемент i-й строки (7), находящийся в k-м столбце множества L_2; l – номера столбцов множества L_0; L_2 – множество столбцов, содержащих более одного элемента Q_{ik}, $k \in L_2$ (число элементов в k-м столбце обозначим q_k, столбцы множества L_2 выделим знаком (+)); R_k – множество номеров строк, максимальные элементы которых попали в столбцы множества L_2 ($k \in L_2$) (строки множества R_k выделим знаком (+)); L_0 – множество столбцов без максимальных элементов строк (столбцы множества L_0 выделим знаком (–)); i_0, j_0 – координаты элемента Q_{ij} наиболее близкого по величине к максимальному элементу i_0-й строки.

Элементы Q_{i0j0} выделяем знаками: (*) при $\delta_{i0j0} = 0$, ($\otimes$) при $\delta_{i0j0} \neq 0$. Элемент, выделенный $\otimes$, будем называть квазимаксимальным элементом i_0-й строки. Операция (11) выполняется только для тех столбцов, в которых находятся не менее двух элементов Q^*_{ij} (множество L_2), при наличии номеров столбцов множества L_0.

На предварительном этапе или в ходе выполнения итераций из процесса распределения будем исключать столбцы (соответственно и строки), в которых находится по одному элементу отмеченному знаком (*) или ($\otimes$). Такие столбцы образуют множество L_1.

Если $b = b_п$ при $m \le n$, то процесс выполнения итераций завершается. В этом случае множество L_2 будет пустым, а число столбцов с максимальными и квазимаксимальными элементами станет равным m. При $m = n$ множество L_0 будет пустым, а при $m < n$ множество L_0 может содержать несколько столбцов. По координатам максимальных и квазимаксимальных элементов определяем координаты плана назначения

$$x^*_{ij} = 1;\ i = 1, 2, \dots, m;\ j \in L_1.$$

При $m > n$ величина $b_п = n$. Если $b = n$, то в отдельных столбцах будут находиться несколько элементов Q^*_{ij}. Следовательно, не будут выполняться все ограничения (3). Необходимо прекратить выполнение итераций и добиться выполнения ограничений (3) на завершающем этапе формирования плана назначения. Для всех столбцов множества L_2 из максимальных элементов строк выбираем наибольшее значение

$$Q^*_{i0k} = \max_{i \in R_k} Q^*_{ik};\ k \in L_2. \tag{12}$$

У всех остальных элементов этих столбцов стираем знаки выделения, формируем план назначения, при необходимости формируем множество "свободных" исполнителей работ и множество работ, на которые не назначены исполнители.

При $m > n$ стремление получить лучший план назначения за счет расширения МЭ до квадратной и использования метода в полном объеме при $m = n$ не приводит к положительному эффекту, так как результаты получаются тождественными.

Схема алгоритма, соответствующая изложенному методу, изображена на рис. 1. Используя схему алгоритма и его описание для иллюстрации метода при $m < n$ и $m > n$, приведем примеры.

Пример 1. Найти квазиоптимальный план назначения, максимизирующий ПЭ (1), удовлетворяющий ограничениям (2),(4), (5), если матрица эффективностей имеет вид

$$Q = \begin{Vmatrix} 0{,}55 & 0{,}75 & 0{,}80 & 0{,}70 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}35 & 0{,}40 & 0 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}50 & 0{,}55 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}15 \end{Vmatrix}. \qquad (13)$$

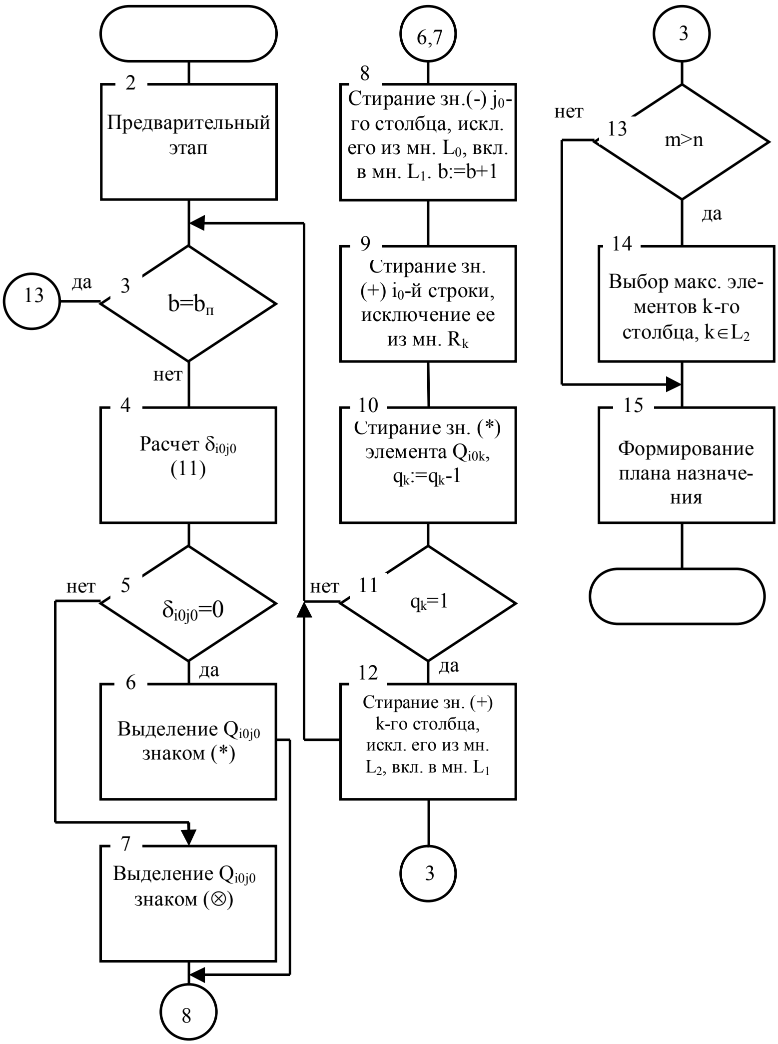

Рис. 1. Схема алгоритма нахождения квазиоптимального плана назначения

Решение. После выполнения предварительного этапа, получим

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} - & - & + & - & - \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0{,}55 & 0{,}75 & 0{,}80^{*} & 0{,}70 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}35 & 0{,}40^{*} & 0 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}50 & 0{,}55^{*} & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}60^{*} & 0{,}40 & 0{,}15 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}; \qquad (14)$$

$L_0 = \{1;\ 2;\ 4;\ 5\}$; $L_1 = 0$; $L_2 = \{3\}$; $R_3 = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $b_п = \min\{4;\ 5\} = 4$;$b = 1$.

Так как $b < b_п$, то выполнив три итерации (блоки 3; 4; … ; 12), получим $\delta_{12} = 0{,}05$; $Q^{\otimes}{}_{12} = 0{,}75$; $\delta_{21} = 0{,}10$; $Q^{\otimes}{}_{21} = 0{,}30$; $\delta_{44} = 0{,}20$; $Q^{\otimes}{}_{44} = 0{,}40$; $L_1 = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $L_0 = \{5\}$; $L_2 = 0$; $b = 4$; $b = b_п$.

Матрица (14) примет вид

$$Q = \left\| \begin{array}{ccccc} 0{,}55 & 0{,}75^{\otimes} & 0{,}80 & 0{,}70 & 0{,}10 \\ 0{,}30^{\otimes} & 0{,}35 & 0{,}40 & 0 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}50 & 0{,}55^{*} & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}60 & 0{,}40^{\otimes} & 0{,}15 \end{array} \right\| . \qquad (15)$$

По координатам элементов матрицы (15), выделенных знаками (*) и (⊗), определяем квазиоптимальный план назначения $x^{*}{}_{12} = 1$; $x^{*}{}_{21} = 1$; $x^{*}{}_{33} = 1$; $x^{*}{}_{44} = 1$; и рассчитываем значение ПЭ (1)

$$M(x_{k0}) = 0{,}75 + 0{,}30 + 0{,}55 + 0{,}40 = 2{,}00 \text{ ед.}$$

Так как $m < n$, то на пятую работу исполнители не будут назначены.

При использовании оптимальных методов [2], [3], получим

$$X_o = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

Значение ПЭ (1) при оптимальном плане назначения будет равно

$$M(X_o) = 0{,}70 + 0{,}30 + 0{,}50 + 0{,}60 = 2{,}10 \text{ ед.}$$

Значение ПЭ при квазиоптимальном плане назначения несколько меньше, чем при оптимальном плане назначения.

Пример 2. Решить задачу, если $m > n$ и МЭ имеет вид

$$Q = \left\| \begin{array}{cccc} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| . \qquad (16)$$

В этом случае план назначения должен удовлетворять ограничениям (3), (4), (6).

Решение. После выполнения предварительного этапа получим

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} + & + & & - \end{array} & \\ \begin{Vmatrix} 9^* & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8^* & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9^* & 4 \\ 2 & 7^* & 3 & 1 \\ 1^* & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} & \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ + \\ + \end{array} \end{array}; \qquad (17)$$

$L_0 = \{4\}$; $L_1 = \{3\}$; $L_2 = \{1; 2\}$; $R_1 = \{1; 5\}$; $R_2 = \{2; 4\}$; $b_п = \min(5; 4) = 4$; $b = 3$.

Так как $b < b_п$, то выполнив одну итерацию (блоки 3; 4; … ; 12), получим $\delta_{54} = 0$; $Q^*_{54} = 1$; $L_1 = \{1; 3; 4\}$; $L_0 = 0$; $L_2 = \{2\}$.

Матрица (17) примет вид

$$Q = \begin{Vmatrix} 9^* & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8^* & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9^* & 4 \\ 2 & 7^* & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1^* \end{Vmatrix}. \qquad (18)$$

Так как $b = b_п$ (блок 3), $m > n$ (блок 13), то найдем наибольший элемент среди максимальных элементов второго столбца (блок 14). МЭ (18) примет вид

$$Q = \begin{Vmatrix} 9^* & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8^* & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9^* & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1^* \end{Vmatrix}. \qquad (19)$$

Квазиоптимальный план назначения, соответствующий МЭ (19) $x^*_{11} = 1$; $x^*_{22} = 1$; $x^*_{33} = 1$; $x^*_{54} = 1$; четвертый исполнитель не назначен ни на одну из работ. Значение ПЭ будет равно

$$M(x_{k0}) = 9 + 8 + 9 + 1 = 27 \text{ ед.}$$

При использовании оптимального метода получим

$$X_o = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Значение ПЭ при оптимальном плане назначения будет равно

$$M(X_o) = 8 + 4 + 9 + 7 = 28 \text{ ед.}$$

Как и ранее выполняется условие

$$M(X_{k0}) < M(X_o).$$

Таким образом, значения ПЭ при квазиоптимальном и оптимальном планах назначения, как правило, будут незначительно отличаться друг от друга. В отдельных случаях они будут совпадать.

Выводы. Алгоритм отличается простотой нахождения элементов матрицы эффективности, наиболее близких по величине к максимальному элементу строки. Он состоит из предварительного этапа, ограниченного числа последовательно повторяющихся итераций, заключительного этапа формирования плана назначения.

В предложенном методе задача максимизации предварительно не преобразуется в задачу минимизации, а прямоугольная матрица эффективности не расширяется до квадратной. Алгоритм может быть использован при распределении средств, если математическая постановка задачи совпадает с изложенной в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. – М.: Сов. радио, 1961. – 365 с.*
2. *Гомозов А.В., Михайлутин О.М., Пискунов С.Н., Цапков И.Ф. Об алгоритме нахождения оптимального плана распределения средств по целям // Збірник наукових праць. – Х.:ХАІ. – 2002. – Вип. 29. – С. 194 – 198.*
3. *Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. – М.: Сов. радио, 1976. – 343 с.*

Поступила 12.03.2005

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил.