УДК 519.9

ПРО ОДИН НОВИЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗВИЧАЙНИМ ЛІНІЙНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ

О.М. Литвин, Г.А. Чаусова
(Українська інженерно-педагогічна академія, Харків)

Пропонується новий метод розв'язання задачі оптимального керування звичайним диференціальним рівнянням. Вважається заданою початкова умова. Крім того і розв'язок рівняння та оптимальне управління мінімізують заданий квадратичний функціонал. Метод розв'язання полягає в заміні поставленої задачі задачею мінімізації деякого функціонала.

звичайне диференціальне рівняння, квадратичний функціонал

Постановка задачі. В даній роботі пропонується новий метод наближеного розв'язання наступної задачі: знайти $y(t)$, $u(t)$, якщо

$$y' = ay(t) + bu(t) + f(t), \quad 0 < t < 1\,; \tag{1}$$

$$y(0) = y_0\,; \tag{2}$$

$$J(y,u) = \int_0^T \left[\beta_1 y^2(t) + \beta_2 u^2(t)\right] dt \to \min,\ \beta_1 + \beta_2 = 1\,. \tag{3}$$

Метод оснований на наступних твердженнях:

Лемма 1 [1]. Норма оператора $S_m : C[0,1] \to C[0,1]$, який ставить у відповідність кожній неперервній функції $f(t) \in C(I)$, $I = [0,1]$ сплайн $S_m(x) = S_m(x,C) := C_k \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1} \dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, x_k \le x \le x_{k+1}, k = \overline{0,m-1}$ з $m+1$ різними вузлами $x_k, k = \overline{0,m}$, задовольняє співвідношення $\|A_m f\|_\infty \le 3\|f\|_\infty$, якщо коефіцієнти $C_k, k = \overline{0,m}$ сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\int_0^1 \left(f(t) - S_m^*(t)\right)^2 dt == \min_C \int_0^1 \left(f(t) - S_m(t)\right)^2 dt\,.$$

Лемма 2 [2]. Хай $x_i = i/m,\ i = \overline{0,m}$, сталі $C_i,\ i = \overline{0,m}$ в операторі

$$S_m f(x) = \sum_{i=0}^m C_i h_i(x) = \varphi_m^T(x) C,\ C = \left[C_0, \dots, C_m\right]^T;$$

$$\varphi_m^T(x)=\left[h_0(x),\dots,h_m(x)\right],\ h_i(x)=h(mx-i),\ i=\overline{0,m};\ h(t)=\frac{1}{2}\left[|t-1|-2|t|+|t+1|\right],$$

знаходяться з умови

$$J_m(C)=\sum_{p=0}^{1}\int_0^1\left[\frac{d^p}{dx^p}\left(f(x)-\varphi_m^T(x)C\right)\right]^2 dx\to\min_C. \tag{4}$$

Тоді

$$C=H_m^{-1}F, \tag{5}$$

де
$$H_m=\sum_{q=0}^{1}\int_0^1\varphi_m^{(q)}(x)\left(\varphi_m^{(q)}(x)\right)^T dx;\quad F=\sum_{q=0}^{1}\int_0^1\varphi_m^{(q)}(x)\frac{d^q}{dx^q}f(x)dx.$$

Твердження 1 [2]. Якщо $\psi(x)=\varphi_m^T(x)C$ – сплайн 1-го степеня з властивостями $\left\|f(\cdot)-\psi(\cdot)\right\|_{W_2^1(I)}=\inf_C\left\|f(\cdot)-\varphi_m^T(\cdot)C\right\|_{W_2^1(I)}$, то

$$\|\psi\|_\infty\le\lceil f\rceil+\frac{1}{2m}\|f'\|_\infty,\ \lceil f\rceil:=\max_{0\le k\le m}\left|f\left(\frac{k}{m}\right)\right|. \tag{6}$$

В наступній теоремі наводиться явний вигляд функції, яка у нерівності (6) забезпечує знак рівності.

Твердження 2 [2]. Для функції $S_0(x)$, яка є сплайном першого степеня з вузлами $\xi_k=\frac{(k+0,5)}{m},\ k=\overline{0,m-1}$ і з властивостями $S_0\left(\frac{k}{m}\right)=0,\ k=\overline{0,m};\quad\left|S_0'(x)\right|=1$ у теоремі 1 виконується знак рівності.

Теорема 1. Якщо шукати наближення розв'язки задачі (1) – (2) у вигляді сплайна 1-го порядку

$$y_n(t)=y_0h(nt)+\sum_{k=1}^{n}y_kh(nt-k+1), \tag{7}$$

коефіцієнти $y_k,\ k=\overline{1,n}$ якого знаходяться з умови

$$J_2(y_n)=\int_0^1\left[y_n'-ay_n-f(t)-bu(t)\right]^2dt+$$

$$+\int_0^1\left[y_n(t)-a\int_0^t y_n(\tau)d\tau-\int_0^t f(\tau)d\tau-b\int_0^t u(\tau)d\tau\right]^2dt\to\min_{y_1,u_1},$$

то можна стверджувати, що $\max\ \left|y(t)-y_n(t)\right|\to0,\quad 0\le t\le1,\quad n\to\infty.$

Цей факт взятий нами за основу при побудові методу наближеного розв'язання задачі (1) – (3). Метод полягає в тому, що цю задачу заміною змінної завжди можна звести до задачі, у якій $T=1$. Тому вважаємо, що $T=1$. Задачу (1) – (3) при $T=1$ замінимо задачею

$$\tilde{J}(u,y)=\int\limits_0^T\left[y'-ay-f(t)-bu(t)\right]^2dt+$$
$$+\int\limits_0^T\left[y(t)-y_0-a\int\limits_0^t y(\tau)d\tau-\int\limits_0^t f(\tau)d\tau-b\int\limits_0^t u(\tau)d\tau\right]^2dt+ \tag{8}$$
$$+\gamma\int\limits_0^T\left[\beta_1y^2(t)+\beta_2u^2(t)\right]dt,$$

де γ – деякий множник.

Хай $H(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & 0\le t<1;\\ \frac{1}{2}, & t=T;\\ 0, & t>1;\end{cases}$ $\quad h(t)=\frac{1}{2}\left[|t+1|-2|t|+|t-1|\right]=\begin{cases}0, & t\le -1, \quad t\ge 1;\\ 1+t, & -1<t\le 0;\\ 1-t, & 0<t<1.\end{cases}$

Будемо знаходити невідомі функції y(t), u(t) у вигляді

$$y_n(t)=y_0h(nt)+\sum_{k=1}^n y_kh(nt-k+1); \tag{9}$$

$$u_n(t)=\sum_{k=1}^n U_kH(nt-k). \tag{10}$$

Зауважимо, що $\operatorname{Supp} h(t)=(-1,1)$; $\operatorname{Supp} H(t)=[0,1]$.

Тому $\operatorname{Supp}(nt-k)=D_k=\{-1<nt-k<1\}=\left\{\frac{k-1}{n}\le t<\frac{k+1}{n}\right\}$;

$$\operatorname{Supp} H(nt-k)==\tilde{D}_k=\{0\le nt-k<1\}=\left\{\frac{k}{n}\le t<\frac{k+1}{n}\right\}.$$

Тобто формули (5), (6) можна записувати також в іншій формі:

$$y_n(t)=(k+1-nt)y_k+(nt-k)y_{k+1};$$
$$\frac{k}{n}\le t\le\frac{k+1}{n};\quad \overline{k=0,n-1}; \tag{11}$$

$$u_n(t)=U_k;\quad \frac{k}{n}\le t<\frac{k+1}{n};\quad \overline{k=0,n-1}. \tag{12}$$

Підставляючи формули (5), (6) у функціонал (4), отримаємо

$$\left(Y=\left[y_1,\dots,\ y_n\right]^T,\ U=\left[U_1,\ \dots,U_n\right]^T\right):$$

$$J(Y,U)=\int_0^T\Big\{y_0\Big[\big(h(nt)\big)_t'-ah(nt)\Big]+\sum_{k=1}^n y_k\Big[\big(h(nt-k)\big)_t'-ah(nt-k)\Big]-f(t)-$$

$$-b\sum_{k=1}^n U_k H(nt-k)\Big\}^2dt+\int_0^T\Big\{y_0\Big(h(nt)-1-a\int_0^t h(n\tau)d\tau\Big)+\sum_{k=1}^n y_k\Big[h(nt-k)-$$

$$-a\int_0^t h(nt-\tau)d\tau\Big]-\int_0^t f(\tau)d\tau-b\int_0^t\sum_{k=1}^n U_kH(n\tau-k)d\tau\Big\}^2dt+\int_0^T\Bigg[\beta_1\Big(\sum_{k=0}^n y_kh(nt-k)\Big)^2+$$

$$+\beta_2\Big(\sum_{k=1}^n U_kH(nt-k)\Big)^2\Bigg]dt\to\min_{Y,U}. \qquad (13)$$

Прирівнюючи частинні похідні функціонала (13) по невідомих y_k, U_k, $k=\overline{1,n}$ до нуля, отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial J(Y,U)}{\partial y_p}=0:\quad \int_0^T\Bigg[y_0\Big[\big(h(nt)\big)_t'-ah(nt)\Big]+\sum_{k=1}^n y_k\Big[\big(h(nt-k)\big)_t'-ah(nt-k)\Big]-f(t)-$$

$$-b\sum_{k=1}^n u_kH(nt-k)\Bigg]\cdot\Big[\big(h(nt-p)\big)_t'-ah(nt-p)\Big]dt+\int_0^T\Bigg[y_0\Big(h(nt)-1-a\int_0^t h(n\tau)d\tau\Big)+$$

$$+\sum_{k=0}^n y_k\Big(h(nt-k)-a\int_0^t h(n\tau-k)d\tau\Big)-\int_0^t f(\tau)d\tau-b\sum_{k=1}^n u_k\int_0^t H(n\tau-k)d\tau\Bigg]\times$$

$$\Big[h(nt-p)-a\int_0^t h(n\tau-p)d\tau\Big]dt+\beta_1\int_0^T\sum_{k=0}^n y_kh(nt-k)\cdot h(nt-p)dt=0,$$

$$p=\overline{1,n}; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial J(Y,U)}{\partial U_p}=0:\quad \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}}\Big\{\sum_{k=p}^{p+1} y_k\Big[\big(h(nt-k)\big)_t'-ah(nt-k)\Big]-f(t)-bu_p\Big\}\times h(nt-k)\times$$

$$\times(-b)dt+\int_{\frac{(p-1)}{n}}^{\frac{p}{n}}\Big\{\sum_{k=p}^{p+1} y_k\Big[h(nt-k)-a\int_0^t h(n\tau-k)d\tau\Big]-$$

$$-\int_0^t f(\tau)d\tau-bu_p\int_0^t H(n\tau+1-p)d\tau\Big\}\times$$

$$\times\left(-b\int_0^t H(n\tau-p)\right)d\tau+\beta_2 U_p\int_{\frac{(p-1)}{n}}^{\frac{p}{n}} dt=0,\quad p=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Введемо позначення: $HH_{k,p}=\int_0^t h(nt-k)\cdot h(nt-p)dt;$

$$A_{pk}=\int_0^T\left[\left(h(nt-k)\right)_t'-ah(nt-k)\right]\cdot\left[\left(h(nt-p)\right)_t'-ah(nt-p)\right]dt;$$

$$B_{pk}=\int_0^T\left[\left(h(nt-k)\right)-a\int_0^t h(n\tau-k)d\tau\right]\cdot\left[h(nt-p)-a\int_0^t h(n\tau-p)d\tau\right]dt\ ;$$

$$C_{pk}=\int_0^T H(nt-k)\left[\left(h(nt-p)\right)_t'-ah(nt-p)\right]dt;$$

$$D_{kp}=\int_0^T\left(\int_0^t H(n\tau-k)\,d\tau\right)\cdot\left[h(nt-p)_t'-a\int_0^t h(n\tau-p)d\tau\right]dt.$$

Тоді систему (14) можна записати у вигляді:

$$\sum_{k=1}^n A_{pk}y_k-b\sum_{k=1}^n C_{pk}U_k+\sum_{k=1}^n B_{pk}y_k-b\sum_{k=1}^n D_{pk}U_k+\beta_1\sum_{k=0}^n HH_{pk}y_k=$$

$$=-y_0\int_0^T\left[h(nt)_t'-ah(nt)\right]\cdot\left[\left(h(nt-p)\right)_t'-ah(nt-p)\right]dt+$$

$$+\int_0^T f(t)\left[\left(h(nt-p)\right)_t'-ah(nt-p)\right]dt-y_0\int_0^T\left[h(nt)_t'-a\int_0^t h(n\tau)d\tau\right]\times$$

$$\times\left[\left(h(nt-p)\right)_t'-a\int_0^t h(n\tau-p)d\tau\right]dt+\int_0^T\left(\int_0^t f(\tau)\right)\Big[h(nt-p)-$$

$$\left.-a\int_0^t h(n\tau-p)d\tau\right]dt,\quad p=\overline{1,n}\ .$$

Систему (15) можна записати у вигляді:

$$-b\sum_{k=p}^{p+1}y_k\int_{p/n}^{(p+1)/n}\left[\left(h(nt-k)\right)_t'-ah(nt-k)\right]dt+b\int_{p/n}^{(p+1)/n}f(t)dt+b^2U_p\frac{1}{n}+$$

$$+(-b)\sum_{k=p}^{n} y_k \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} \left[h(nt-k) - a\int_0^t h(n\tau-k)d\tau \right] dt +$$

$$+b\int_{\frac{p}{n}}^{T}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]dt + b^2 U_p \int_{\frac{p}{n}}^{T}\int_0^t H(n\tau-p)d\tau dt + \beta_2 \frac{U_p}{n} = 0, \quad p=\overline{1,n}.$$

Перепишемо ці системи у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(A_{pk}+B_{pk}\right)y_k - b\sum_{k=1}^{n}\left(C_{pk}+D_{pk}\right)U_k = -y_0\int_0^{1/n}\left[\left(h(nt)\right)' \times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(h(nt-p)\right)_t' - ah(nt-p)\right]dt + \int_0^{1/n}\left[\left(h(nt-p)\right)_t' - a\int_0^t h(n\tau-p)d\tau\right]dt -\right.$$

$$-b\sum_{k=p}^{p+1} y_k \int_{\frac{p}{n}}^{T}\left[\left(h(nt-k)\right)_t' - ah(nt-k) + h(nt-k) - a\int_0^t h(n\tau-k)\right]dt +$$

$$+b\left[\int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t)dt - \int_{p/n}^{T}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)dt + b^2 U_p\left(\frac{1}{n} + \int_{p/n}^{T}\int_0^t H(n\tau-p)d\tau dt\right)\right] +$$

$$+\beta_2 \frac{U_p}{n} = b\int_{\frac{p}{n}}^{T}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)dt + b\int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t)dt, \quad p=\overline{1,n}. \qquad (14)$$

Розв'язок цих систем підставляємо у (9) – (10). Це і буде шуканий наближений розв'язок задачі (1) – (3).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ciesielsky Z. Properties of the orthonormal Franklin systems // Studia mathematica, 23. – 1963. – № 2. – P. 141 – 157.*
2. *Литвин О.М. Про оцінку похибки наближення диференційованих функцій лінійними сплайнами в нормі* $W_2^1(I), I=[0,1]$ *// Доповіді Академії Наук України. – 2004.– № 11. – С. 33 – 39.*

Надійшла 23.03.2005

Рецензент: доктор фізико-математичних наук професор А.О. Александрова, Харківський університет Повітряних Сил.