УДК 681.3.06 : 518

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА С КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.И. Тыртышников, Н.Б. Никулин, Е.Б. Одарущенко
(Полтавский военный институт связи)

Предложен алгоритм расчета амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) цифровых фильтров произвольного порядка, реализованных в канонической форме, по заданным комплексным либо действительным весовым коэффициентам, не использующий операций над комплексными числами.

амплитудно-частотныt характеристики, цифровой фильтр

Введение. В задачах проектирования цифровых фильтров часто желательно получение АЧХ в табличном или графическом виде – например, с целью анализа тенденции ее изменения при моделировании адаптивного фильтра. В случае, когда фильтр имеет высокий порядок и комплексные весовые коэффициенты, многократный расчет АЧХ является сложной задачей, требующей больших вычислительных и временных затрат даже при использовании языков программирования, имеющих стандартные подпрограммы вычисления модуля комплексного числа. При этом главным источником названных затрат является именно многократное выполнение операций над комплексными числами.

В известной авторам литературе описания вычислительных алгоритмов решения данной задачи, свободных от указанного недостатка, не обнаружены.

Целью данной работы является получение расчетных выражений, не содержащих операций с комплексными числами, и в совокупности образующих универсальный алгоритм расчета АЧХ цифровых фильтров произвольного порядка (как с комплексными, так и с действительными весовыми коэффициентами), реализованных в канонической форме.

Передаточная функция цифрового фильтра, имеющего N прямых и M обратных связей, может быть представлена в виде:

$$H(Z)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n Z^{-n}}{1-\sum\limits_{m=1}^{M} b_m Z^{-m}} = Z^{N-M}\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n Z^{N-n}}{-\sum\limits_{m=0}^{M} b_m Z^{M-m}},$$

где a_n и b_m – весовые коэффициенты прямых и обратных связей цифрового фильтра соответственно, а $b_0 = -1$.

Обозначим $X(Z) = \sum_{n=0}^{N} a_n Z^{N-n}$; $\quad Y(Z) = -\sum_{m=0}^{M} b_m Z^{M-m}$.

Тогда АЧХ фильтра можно представить в виде

$$|H(Z)| = \left|Z^{N-M}\right| |X(Z)| \big/ |Y(Z)| .$$

С учетом того, что $\left|Z^{N-M}\right| = 1$,

$$|H(Z)| = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}^2\, X(Z) + \mathrm{Im}^2\, X(Z)}{\mathrm{Re}^2\, Y(Z) + \mathrm{Im}^2\, Y(Z)}} = \sqrt{\frac{K_x^2(wT)}{K_y^2(wT)}}\ , \qquad (1)$$

где w – циклическая частота; T – интервал дискретизации; $K_x(wT)$ и $K_y(wT)$ – АЧХ нерекурсивной и рекурсивной частей цифрового фильтра соответственно; символами Re и Im обозначены действительные и мнимые части соответствующих комплексных величин.

Для получения $\mathrm{Re}^2X(Z)$, $\mathrm{Im}^2X(Z)$, $\mathrm{Re}^2Y(Z)$, $\mathrm{Im}^2X(Z)$ воспользуемся общеизвестным алгоритмом сокращенного умножения

$$(x + y + z + \ldots + t + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + 2xy + 2xz + \ldots + 2xu +$$
$$+ 2yz + \ldots + 2yu + \ldots + 2tu,$$

или, переходя к индексным обозначениям переменных

$$(\sum_{n=0}^{M} x_n)^2 = \sum_{n=0}^{M} x_n{}^2 + 2(\sum_{n=1}^{M} x_0 x_n + \sum_{n=2}^{M} x_1 x_n + \ldots + \sum_{n=M}^{M} x_{M-1} x_n).$$

Производя перегруппировку членов, получаем

$$(\sum_{n=0}^{M} x_n)^2 = x_0{}^2 + \sum_{n=1}^{M} (x_n{}^2 + 2\sum_{k=0}^{M-n} x_{k+n} x_k). \qquad (2)$$

Для случая, когда весовые коэффициенты фильтра комплексные

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{N} \dot{a}_n Z^{N-n} = \sum_{n=0}^{N} [a_n \cos(N-n)wT - e_n \sin(N-n)wT +$$
$$+ j(a_n \sin(N-n)wT + e_n \cos(N-n)wT)],$$

где $a_n = \mathrm{Re}\,\dot{a}_n$, $\quad e_n = \mathrm{Im}\,\dot{a}_n$.

Соответственно:

$$\mathrm{Re}\, X(Z) = \sum_{n=0}^{N} \left[a_n \cos(N-n)wT - e_n \sin(N-n)wT\right]; \qquad (3)$$

$$\operatorname{Im} X(Z) = \sum_{n=0}^{N} \left[(a_n \sin(N-n)wT + e_n \cos(N-n)wT)\right]. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (2) и выполняя несложные преобразования, получаем:

$$\operatorname{Re}^2 X(Z) = (a_0 \cos NwT - e_0 \sin NwT)^2 + \sum_{n=0}^{N} [(a_n \cos(N-n)wT -$$

$$- e_n \sin(N-n)wT)^2 + 2\sum_{k=0}^{N-n} ((a_k \cos(N-k)wT - e_k \sin(N-k)wT) \times$$

$$\times (a_{k+n} \cos(N-k-n)wT - e_{k+n} \sin(N-k-n)wT)] = \ldots$$

$$= a_0^2 \cos^2 NwT + e_0^2 \sin^2 NwT - a_0 e_0 \sin 2NwT +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} [a_n^2 \cos^2(N-n)wT + e_n^2 \sin^2(N-n)wT - a_n e_n \sin 2(N-n)wT +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-n} ((a_k a_{k+n} + e_k e_{k+n}) \cos nwT + (a_k e_{k+n} - e_k a_{k+n}) \sin nwT +$$

$$+ (a_k a_{k+n} - e_k e_{k+n}) \cos(2(N-k)-n)wT - (a_k e_{k+n} + e_k a_{k+n}) \sin(2(N-k)-n))].$$

Подставляя (4) в (2) аналогичным образом получаем

$$\operatorname{Im}^2 X(Z) = a_0^2 \sin^2 NwT + e_0^2 \cos^2 NwT + a_0 e_0 \sin 2NwT +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} [a_n^2 \sin^2(N-n)wT + e_n^2 \cos^2(N-n)wT + a_n e_n \sin 2(N-n)wT +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-n} ((a_k a_{k+n} + e_k e_{k+n}) \cos nwT + (a_k e_{k+n} - e_k a_{k+n}) \sin nwT -$$

$$- (a_k a_{k+n} - e_k e_{k+n}) \cos(2(N-k)-n)wT -$$

$$- (a_k e_{k+n} + e_k a_{k+n}) \sin(2(N-k)-n))].$$

Суммируя два последних выражения, получаем

$$K_x^2(wT) = \operatorname{Re}^2 X(Z) + \operatorname{Im}^2 X(Z) = a_0^2 + e_0^2 + \sum_{n=1}^{N} [a_n^2 + e_n^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=0}^{N-n} ((a_k a_{k+n} + e_k e_{k+n}) \cos nwT + (a_k e_{k+n} - e_k a_{k+n}) \sin nwT)]. \qquad (5)$$

Соответственно, выражение для $K_y^2(wT)$ имеет вид

$$K_y^2(wT) = \mathrm{Re}^2\, Y(Z) + \mathrm{Im}^2\, Y(Z) = 1 + \sum_{m=1}^{M} [c_m^2 + d_m^2 + + 2\sum_{k=0}^{M-m}((c_k c_{k+m} + d_k d_{k+m})\cos mwT + (c_k d_{k+m} - d_k c_{k+m})\sin mwT)], \quad (6)$$

где $c_m = \mathrm{Re}\,\dot{b}_m$; $d_m = \mathrm{Im}\,\dot{b}_m$; $c_0 = -1$; $d_0 = 0$.

Окончательно АЧХ фильтра рассчитываем, подставляя (5) и (6) в (1).

Для частного случая, когда весовые коэффициенты цифрового фильтра действительные, (5) и (6) сводятся к известным выражениям:

$$K_x^2(wT) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}[a_n^2 + 2\cos nwT \sum_{k=0}^{N-n} a_k a_{k+n}];$$

$$K_y^2(wT) = 1 + \sum_{m=1}^{M}[b_m^2 + 2\cos mwT \sum_{k=0}^{M-m} b_k b_{k+m}].$$

Вывод. Главным преимуществом полученного алгоритма является то, что он не включает в себя операций с комплексными числами, за счет чего и достигается существенное уменьшение – в сравнении с традиционными алгоритмами – времени его выполнения. Следует отметить, что выигрыш во времени выполнения увеличивается с возрастанием порядка цифрового фильтра, АЧХ которого рассчитывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – 2-е изд. – С.-Пб.: Политехника, 1999. – 592 с.*
2. *Виноградов Н.А., Яковлев В.Н. и др. Справочник по устройствам цифровой обработки информации. – К.: Техника, 1988. – 415 с.*
3. *Бондарев В.Н., Трёстер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. пособие для вузов. – Севастополь: СевГТУ, 1999. – 398 с.*

Поступила 5.03.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Н.В. Галай,
Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка.