УДК 623.021 : 005

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СРЕДСТВ ПРОТИВОСТОЯЩЕЙ СТОРОНЫ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ

В.Б. Кононов
(Харьковский университет Воздушных Сил)

В статье рассмотрен алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

оптимальное распределение, разнородные средства, критерий максимума средневзвешенного математического ожидания

Постановка задачи. Важное место в конфликтных ситуациях занимает правильное планирование, при котором необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом от поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением основных разнородных сил и средств сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 8]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и предложены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решение задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. В [6] ставится задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критериям максимума и минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях полной и неполной определённости и постоянных и переменных параметрах распределения сил и средств стороны A. В [7] рассматривается алгоритм оптимального управления распределением разнороднородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешеного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны A. В [8] рассматривается алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны. Однако в этих работах не рассматривался алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Цель статьи. Целью статьи является разработка алгоритма решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Основной материал. Алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных боевых средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества боевых средств противостоящей стороны в конце боя и операции в условиях определённости при переменных параметрах распределения боевых средств оперирующей стороны

Рассмотрим задачу оптимального распределения разнородных сил и средств стороны A, в которой сторона A выбирает свои управляющие параметры $\alpha(t)=\left\|\alpha_{ji}(t)\right\|_{n,m}$ так, чтобы средневзвешенное количество основных сил стороны B было максимальным при известной стратегии распределения сил и средств стороны B. В данной задаче зависимость матрицы управляющих параметров $\alpha(t)$ от времени позволяет учитывать маневр сил и средств, т.е. учитывать реально возникающую необходимость перенацеливания сил и средств оперирующей стороны в зависимости от ситуаций, складывающихся в ходе ведения конфликтной ситуации.

Математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств стороны A, описанные в статьях [1 – 5] предполагают, что оперирующая сторона A владеет информацией о стратегии, которой будет придерживаться сторона B.

Последуем подходу, изложенному в статье [8] и воспользуемся методом условного градиента для решения задачи:

$$\max_{\{\alpha(t)\}}\sum_{i=1}^{m} v_i x_i(T); \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}=-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}b_{ij}y_j(t), \quad i=\overline{1,m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt}=-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ji}\ a_{ji}x_i(t), \quad j=\overline{1,n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0)=x_i^0, \quad i=\overline{1,m}; \quad y_j(0)=y_j^0, \quad j=\overline{1,n};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\beta_{ij}=1, \quad j=\overline{1,n}; \quad \beta_{ij}\ge 0; \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ji}=1, \quad i=\overline{1,m}; \quad \alpha_{ji}\ge 0; \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_i(t)$, $y_j(t)$ – математические ожидания количества средств сторон A и B, сохранившихся к моменту времени t; $y_j(T)$ – математические ожидания количества средств стороны B, сохранившихся к моменту времени T; m, n – количество типов сил и средств сторон A и B соответственно; t –

текущее время конфликтной ситуации; T – заданное время конфликтной ситуации; $v_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ – коэффициент важности основного средства i-го типа оперирующей стороны A; $\beta_{ij} \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – заданные парамеры распределения сил и средств стороны B; $\alpha_{ji} \left(j = \overline{1, n};\ i = \overline{1, m};\ 0 \le t \le T\right)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны A по силам и средствам стороны B; $x_i^0, y_j^0 \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – количество сил и средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B в начале конфликтной ситуации; $a_{ji}, b_{ij} \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – эффективные скорострельности средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B соответственно.

В рассматриваемой задаче учитивается перенацеливания сил и средств оперирующей стороны в зависимости от ситуации в ходе конфликтной ситуации.

В данном случае функцию $\left\|\alpha_{ji}(t)\right\|_{n,m}$, как функцию распределения (в долях) боевых средств по целям в момент времени t определим в класс кусочно-постоянных функций.

Предлагаемый алгоритм состоит в последовательном численном решении задачи (1) – (3) вначале для класса постоянных функций – управлений на промежутке $[0, T]$, затем для классов кусочно постоянных функций – управлений соответственно с одной, двумя и т.д. точками переключения.

Максимальное количество отрезков разбиения равно: $M_{max} = T / \Delta$, где величина Δ определяется исходя из требований тактики ведения боевых действий и тактико-технических показателей боевых средств.

Таким образом, решается следующая последовательность задач Майера:

$$\max_{\{\alpha_M(t)\}} \sum_{i=1}^{m} v_i x_i(T) = \max_{\{\alpha_M(t)\}} J(\alpha_M(t)); \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{M_{ji}}(t)\, a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{5}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_{ij}=1, \quad j=\overline{1,n}; \quad \beta_{ij}\ge 0; \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n};\\
\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{M_{ji}}(t)=1, \quad i=\overline{1,m}; \quad \alpha_{M_{ji}}(t)\ge 0; \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m},
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$1 \le M \le M_{max},$$

где $\alpha_M(t)=\left\|\alpha_{M_{ji}}(t)\right\|_{n,m}$ – матричная функция кусочно-постоянных функций управлений с (M – 1)-й точкой переключения.

Критерий прекращения вычислений следующий:

$$\left|J\left[\alpha^*_M(t)\right]-J\left[\alpha^*_{M+1}(t)\right]\right| \langle\ \varepsilon; \quad \varepsilon\ \rangle\ 0, \quad 1\le M\le M_{max},$$

где $\alpha^*_M(t), \alpha^*_{M+1}(t)$ – оптимальные управления для задачи (4) – (6).

Для решения задачи (4) – (6) используется метод условного градиента. Возможность его применения вытекает из следующих соображений.

Экстремальная задача

$$\max_{\alpha_M(t)\in D_M}\left\langle J'\left[\alpha^k_M(t)\right], \quad \alpha_M(t)\right\rangle, \quad k=0,1,\ldots,$$

где D_M – множество матричных функций, удовлетворяющими соотношения (6) по $\alpha_{M_{ji}}(t)$, решается методом условного градиента так как

$$
\begin{aligned}
\max_{\alpha_M(t)\ \in D_M}\left\langle J'\left[\alpha^k_M(t)\right], \quad \alpha_M(t)\right\rangle &= \max_{\alpha_M(t)\in D_M}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)\alpha_{m_{ji}}(t)\right]dt = \\
&= \min_{\alpha_M(t)\in D_M}\sum_{p=1}^{M}\int_{\frac{(p-1)T}{M}}^{\frac{pT}{M}}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)\,\alpha_{M_{jip}}\right]dt = \\
&= \sum_{p=1}^{M}\min_{\{\alpha_{M_{jip}}\}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{\frac{(p-1)T}{M}}^{\frac{pT}{M}}a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)\,dt\right]\alpha_{M_{jip}},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$\alpha_{M_{ji}}(t)=\alpha_{M_{jip}}=\text{const}; \quad t\in\left[\frac{(p-1)T}{M}, \quad \frac{pT}{M}\right]; \quad p=\overline{1,M};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{M_{jip}}=1, \quad i=\overline{1,M}; \quad \alpha_{M_{jip}}\ge 0; \quad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}; \quad p=\overline{1,M}.$$

Интегралы в соотношении (7) вычисляются по формуле прямоугольников, а значения $x_i(t_s), \eta_j(t_s)$ определяются в результате численного решения систем дифференциальных уравнений по методу Рунге – Кутта 4-го порядка.

Максимум в (7) достигается при

$$\overline{\alpha}^{k}_{M_{jip}} = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, M}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, M}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\alpha(j_k, i, p)_M = \arg\min\limits_{1 \le j \le n} a_{ji} I_{M_{ijp}}, \quad i = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, M}.$

Следующее (k + 1)-е приближение определится из соотношения:

$$\alpha^{k+1}_{M}(t) = \alpha^{k}_{M}(t) + \rho_{Mk}\left[\overline{\alpha}^{k}_{M} - \alpha^{k}_{M}\right], \quad t \in [0, T]. \tag{9}$$

Длина шага ρ_{Mk} находится в результате решения задачи:

$$\varphi(\rho_{Mk}) = \max_{0 \le \rho_M \le 1} \varphi(\rho_M) = \max_{0 \le \rho_M \le 1} J\left[\alpha^{k}_{M}(t) + \rho_M\left(\overline{\alpha}^{k}_{M}(t) - \alpha^{k}_{M}(t)\right)\right], \tag{10}$$

$t \in [0, T]$.

Точка максимума в (10) определяется по соотношению

$$\rho_{Mk} = 0{,}25 + \frac{0{,}25[\varphi(0) - \varphi(0{,}5)]}{0{,}5\varphi(0) - \varphi(0{,}5) + 0{,}5\varphi(1)}$$

Критерий останова алгоритма определяется соотношением

$$\Delta_{Mk} = \left|\sum_{j=1}^{n} w_j \left[y^{k+1}_{M}(T) - y^{k}_{M}(T)\right]\right| \langle\, \varepsilon,$$

где $\left\{\alpha^{k}_{M}(t), x^{k}(t), y^{k}(t)\right\}$ – k-ое приближение решения задачи (4) – (6).

Выводы.

1. В статье описан разработанный алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

2. Алгоритм оптимального распределения разнородных средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны можно ис-

пользовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХВФ «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1 (11). – С. 129 – 133.*
1. *Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2 (18). – С. 155 – 158.*
2. *Кононов В.Б., Рафальский Ю.И.,Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5 (21). – С. 45 – 47.*
3. *Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6 (22). – С. 277 – 280.*
4. *Кононов В.Б. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 1. – С. 59 – 62.*
5. *Кононов В.Б. Оптимальное управление распределением разнородных сил и средств по критериям максимума средневзвешеного математического ожидания суммарного количества основных сил оперирующей стороны и минимума сил противника // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – 2004. – Вип. 26. – С. 87 – 92.*
6. *Кононов В.Б. Алгоритм оптимального распределения разнороднородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешеного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в условиях постоянных параметров распределения // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 9 (37). – С. 59 – 65.*
7. *Кононов В.Б. Алгоритм оптимального распределения разнороднородных средств по критерию минимума средневзвешеного математического ожидания при переменных параметрах // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС. – 2005. – Вип. 1 (41). – С. 193 – 200.*

Поступила 1.06.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Б.Ф.Самойленко,
Харьковский университет Воздушных Сил.