УДК 621.396.96

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА МАТРИЦЫ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В АЛГОРИТМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА МНОГОПОЗИЦИОННОЙ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ИЗБЫТОЧНОСТИ ИНФОРМАЦИИ

Ю.В. Кулявец, О.И. Богатов, Д.П. Лабенко
(Объединенный научно-исследовательский институт ВС Украины, Харьков)

Получено аналитическое выражение для корреляционной матрицы ошибок определения неизменяющейся матрицы весовых коэффициентов при использовании для ее расчета оценки координат объекта, полученной одним из измерителей. Показано, что точность оценивания матрицы весовых коэффициентов зависит от точности определения координат объекта, используемых для расчета матрицы весовых коэффициентов, от значения матрицы весовых коэффициентов и от местоположения объекта.

вектора состояния, матрица весовых коэффициентов, многопозиционная радиолокационная система, избыточность информации

Постановка проблемы и анализ литературы. В многопозиционных системах локации формирование единичного замера координат объекта, как правило, является двухэтапным [6]. На первом этапе, по результатам оценок параметров сигналов, проводится измерение m первичных координат объекта – вектора наблюдения Θ (разностей дальностей или дальностей от объекта до пунктов приема, азимутов в пунктах приема и т.д.). При этом, все замеры должны быть практически одновременными, чтобы между моментами измерения на разных позициях перемещение цели было значительно меньше ожидаемой ошибки ее местоположения, не сказывалось на величине этой ошибки и этим перемещением можно было пренебречь. Задача второго этапа измерения - объединение полученных на первом этапе оценок параметров сигналов или первичных координат, измеренных относительно отдельных позиций, и формирование результирующего единичного замера в центральной системе (декартовых или полярных) координат многопозиционной системы локации – вектора состояния α. Часто общее число измеренных первичных координат m (размерность вектора наблюдения Θ) является избыточным, т.е. превышает минимально достаточное для определения геометрических координат объекта. Тогда формирование результирующего замера α_p представляет собой статистическую задачу оценки вектора состояния α по избыточному числу оценок первичных координат Θ_i, полученных всеми позициями многопозиционной системы одновременно. В [1] было показано, что решение задачи оптимального использования оценок одного и того же вектора состояния, сводится к последовательному применению алгоритма фильтрации оценок. Там же показано, что результирующая оценка местоположения объекта $\hat{\alpha}_p$, при условии независимости оценок, полученных различными измерителями, представляет собой весовую сумму оценок вектора состояния измерителей :

$$\hat{\alpha}_p = \hat{\alpha}_1 + C_p^{-1} \cdot C_2 \cdot \left(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1\right) = \hat{\alpha}_1 + W \cdot \left(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1\right) = \left(I - W\right) \cdot \hat{\alpha}_1 + W \cdot \hat{\alpha}_2 ; \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 , \quad (2)$$

где $\mathbf{C}_\mu$ – матрица точности оценок μ-го измерителя, обратная корреляционной матрице ошибок (КМО) оценивания координат объекта $\mathbf{C}_\mu^{-1}$ ($\mu = p, 1, 2$); $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Известно [1, 6, 8], что точность оценивания координат объекта многопозиционной системой (т.е. матрица точности $\mathbf{C}_\mu$) зависит не только от точности и состава первично измеряемых параметров сигнала, но и от местоположения объекта. Тогда и матрица весовых коэффициентов (МВК) $\mathbf{W} = \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{C}_2$, входящая в выражение (1) для определения результирующей оценки $\hat{\alpha}_p$, также зависит от местоположения объекта, которое и требуется определить. Поэтому прямое применение алгоритма (1) представляется затруднительным. В [4] проведен анализ влияния точности определения оценки МВК $\widehat{W}$ (независимо от методов ее получения) на точность результирующей оценки $\hat{\alpha}_p$. Там же показано, что точность $\hat{\alpha}_p$ зависит не только от точности оценок $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$, но и от точности оценивания МВК $\hat{\alpha}^T = \left\| \hat{\alpha}_1, \ \hat{\alpha}_2, \ \ldots, \ \hat{\alpha}_n \right\|$, т.е. ошибки определения МВК $\widehat{W}$ сказываются на точности результирующей оценки $\hat{\alpha}_p$. Однако, возможные методы получения МВК не рассмотрены и, как следствие, не приведены соотношения, определяющие точность оценки МВК. В [5] получено аналитическое выражение для КМО определения неизменяющейся МВК $\widehat{W}$ при использовании оценок КМО $\hat{\alpha}_p$ и $\hat{C}_2^{-1}$

нормально распределенного вектора состояния объекта, полученного одновременно различными независимыми измерителями. Показано, что точность оценивания МВК зависит как от точности измерителей координат, так и от длины выборки, взятой для определения КМО оценивания местоположения объекта. Поэтому для приемлемой точности определения МВК такой метод требует достаточно длительного интервала времени оценивания и может быть использован для измерения координат неподвижного или медленно перемещаемого объекта. В то же время в условиях информационной избыточности оценка местоположения объекта, как правило, априорно известна [6 – 8]. Такое предположение оправдано из условия возможного знания области пространства, из которой производится прием сигналов от объекта, или же возможностью определения оценки координат объекта одним из измерителей. Тогда одним из возможных методов получения оценки МВК $\widehat{W}$ представляется ее расчет по оценке вектора состояния $\hat{\alpha}$ одного из измерителей или по оценке минимально достаточного для определения координат объекта вектора наблюдения $\hat{\Theta}$ этого измерителя.

Цель статьи. Провести анализ точности определения матрицы весовых коэффициентов при использования для ее расчета оценки координат объекта, полученной одним из измерителей.

Изложение основного материала. Считаем, что оценка местоположения объекта $\hat{\alpha}$ определена одним из измерителей. Также считаем что эта оценка

$$\hat{\alpha}^{T} = \left\| \hat{\alpha}_1, \quad \hat{\alpha}_2, \quad \ldots, \quad \hat{\alpha}_n \right\|$$

распределена по нормальному закону с определенными математическим ожиданием и корреляционной матрицей ошибок оценивания.

Вектор состояния и МВК связаны между собой определенной ранее функциональной зависимостью

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_p^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{C}_2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Использование для определения МВК оценки вектора состояния $\hat{\alpha}$ приводит к соотношению

$$\widehat{W} = \mathbf{C}_p^{-1}\left(\hat{\alpha}\right) \mathbf{C}_2\left(\hat{\alpha}\right) = \boldsymbol{\omega}\left(\hat{\alpha}\right).$$

Модель изменения квадратной матрицы $\mathbf{W}$ с произвольными вещественными элементами составим "вытянув" ее в вектор-столбец $\mathbf{W}^{\#}$ размера $n^2 \times 1$ [8]. Тогда

$$\widehat{W}^{\#} = \left[\ \mathbf{C}_p^{-1}\left(\hat{\alpha}\right) \cdot \mathbf{C}_2\left(\hat{\alpha}\right)\ \right]^{\#} = \left[\boldsymbol{\omega}\left(\hat{\alpha}\right)\right]^{\#}.$$

Например, при $n = 2$:

$$\begin{Vmatrix} \widehat{W}_{11} \\ \widehat{W}_{12} \\ \widehat{W}_{21} \\ \widehat{W}_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\omega}_{11}\left(\hat{\alpha}\right) \\ \boldsymbol{\omega}_{12}\left(\hat{\alpha}\right) \\ \boldsymbol{\omega}_{21}\left(\hat{\alpha}\right) \\ \boldsymbol{\omega}_{22}\left(\hat{\alpha}\right) \end{Vmatrix}.$$

Предполагая, что матричная функция $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha})$ на любом достаточно узком участке близка к линейной, представим ее в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $\boldsymbol{\alpha}_0$, сохранив члены порядка не выше первого

$$\widehat{W}^{\#} = \left[\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}_0)\ \right]^{\#} + \mathbf{P} \cdot \left(\hat{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{P}_n \end{Vmatrix}$ – блочная матрица пересчета вектора состояния $\boldsymbol{\alpha}$ в МВК $\mathbf{W}$, а

$$\mathbf{P}_i = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i} \right\|^{\#} \tag{4}$$

представляет собой столбец размерности $n^2 \times 1$.

Тогда размерность матрицы $\mathbf{P}$ составит $n^2 \times n$.

Например, при $n = 2$:

$$\mathbf{P} = \left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_1}\right]^{\#} \quad \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_2}\right]^{\#} \right\|.$$

Математическое ожидание $\mathbf{W}^{\#}$ и корреляционная матрица ошибок расчета МВК $\mathbf{C}_W^{-1}$ записываются соответственно в виде [3, 8]

$$\mathbf{W}^{\#} = \left[\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}_0)\ \right]^{\#}; \tag{5}$$

$$\mathbf{C}_W^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{P}^T, \tag{6}$$

где $\mathbf{C}_\alpha^{-1}$ – недиагональная в общем случае корреляционная матрица ошибок оценки вектора состояния $\mathbf{P}_i$, которая определяется для выбранного измерителя местоположения объекта и является обратной матрице точности оценивания местоположения объекта $\mathbf{C}_\alpha$, размерности $n \times n$

($\mathbf{C}_{\alpha}^{-1} = \mathbf{C}_1^{-1}$ или $\mathbf{C}_{\alpha}^{-1} = \mathbf{C}_2^{-1}$ в зависимости от используемого для расчета МВК измерителя); $\mathbf{C}_{W}^{-1}$ – недиагональная в общем случае корреляционная матрица ошибок определения МВК, размерности $n^2 \times n^2$.

Таким образом, наличие в выражении (6) матрицы $\mathbf{C}_{\alpha}^{-1}$ показывает, что точность оценивания МВК зависит от точности определения координат объекта, используемых для расчета МВК.

Для дальнейшего анализа точности оценивания МВК необходимо получить выражение для матрицы пересчета вектора состояния $\boldsymbol{\alpha}$ в МВК $\mathbf{W}$. Предполагая, что за время измерения координаты объекта не изменяются и используя теоремы о производной произведения матриц и производной обратной матрицы [2, 3] запишем выражение для i-го блока $\mathbf{P}_i$ матрицы $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}_i = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}\right]^{\#} = \left[\frac{\partial\left(\mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{C}_2^{-1}\right)}{\partial \alpha_i}\right]^{\#} = \left[\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \alpha_i}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_p^{-1}\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \alpha_i}\right]^{\#} =$$

$$= \left[-\mathbf{C}_p^{-1}\frac{\partial\left(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\right)}{\partial \alpha_i}\mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_p^{-1}\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \alpha_i}\right]^{\#} = \qquad (7)$$

$$= \left[\mathbf{C}_p^{-1}\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \alpha_i} - \mathbf{C}_p^{-1}\frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \alpha_i}\mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_p^{-1}\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \alpha_i}\mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{C}_2\right]^{\#} =$$

$$= \left[\mathbf{C}_p^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \alpha_i}(\mathbf{I} - \mathbf{W}) - \frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \alpha_i}\mathbf{W}\right)\right]^{\#}.$$

Подстановка (7) в (6) позволяет определить корреляционную матрицу ошибок определения матрицы весовых коэффициентов. Анализ выражения (7) показывает, что точность определения матрицы весовых коэффициентов зависит не только от точности оценок координат объекта, используемых для расчета МВК, но и от значения матрицы весовых коэффициентов $\mathbf{W}$, которая в свою очередь, как было отмечено ранее, зависит от местоположения объекта.

Полученное выражение (7) не позволяет предъявить требования к точности измерения первичных координат (вектора наблюдения $\boldsymbol{\Theta}$ размерности $m \times 1$), которые пересчитываются в координаты объекта и используются для расчета матрицы весовых коэффициентов.

Согласно [1, 6 – 8] матрица точности вектора состояния имеет вид

$$\mathbf{C}_{\mu} = \mathbf{H}_{\mu}^{T} \cdot \mathbf{C}_{\Theta\mu} \cdot \mathbf{H}_{\mu} \quad (\mu = 1,\ 2), \tag{8}$$

где $\mathbf{C}_{\Theta\mu} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\sigma_k^2}\right\}$ – диагональная (при условии независимости первичных измерений) матрица точности вектора наблюдения Θ размерности $m \times m$, которая является обратной КМО первичных измерений; $\mathbf{H}_{\mu} = \left\| \frac{\partial\ \overset{()}{\mu}}{\partial \alpha^{(j)}} \right\|$ – матрица статического пересчета изменений вектора состояния α в изменения вектора наблюдаемых параметров Θ размерности $m \times n$.

Тогда выражение (6) принимает вид

$$\mathbf{C}_{W}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \left(\mathbf{H}_{\mu}^{T} \cdot \mathbf{C}_{\Theta\mu} \cdot \mathbf{H}_{\mu}\right)^{-1} \cdot \mathbf{P}^{T} \tag{9}$$

($\mu = 1$ или $\mathbf{W}$ в зависимости от используемого для расчета МВК измерителя). Для дальнейшего анализа подставим (8) в выражение (7) для определения i-го блока $\mathbf{P}_i$ матрицы $\mathbf{P}$ (матрицы пересчета вектора состояния α в МВК $\mathbf{W}$)

$$\mathbf{P}_i = \left[\left(\mathbf{H}_p^{T}\mathbf{C}_{\Theta p}\mathbf{H}_p\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial\left(\mathbf{H}_2^{T}\mathbf{C}_{\Theta 2}\mathbf{H}_2\right)}{\partial \alpha_i}\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right) - \frac{\partial\left(\mathbf{H}_1^{T}\mathbf{C}_{\Theta 1}\mathbf{H}_1\right)}{\partial \alpha_i}\mathbf{W}\right)\right]^{\#}. \tag{10}$$

Используя теорему о производной произведения матриц и учитывая то, что $\mathbf{C}_{\Theta}$ не зависит от α [1, 6, 8], получим выражение вида $\frac{\partial\left(\mathbf{H}_{\mu}^{T}\mathbf{C}_{\Theta\mu}\mathbf{H}_{\mu}\right)}{\partial \alpha_i}$ входящее в (10):

$$\frac{\partial\left(\mathbf{H}_{\mu}^{T}\mathbf{C}_{\Theta\mu}\mathbf{H}_{\mu}\right)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathbf{H}_{\mu}^{T}}{\partial \alpha_i}\mathbf{C}_{\Theta\mu}\mathbf{H}_{\mu} + \mathbf{H}_{\mu}^{T}\mathbf{C}_{\Theta\mu}\frac{\partial \mathbf{H}_{\mu}}{\partial \alpha_i} =$$

$$= \mathbf{V}_{\mu}^{T}\mathbf{C}_{\Theta\mu}\mathbf{H}_{\mu} + \mathbf{H}_{\mu}^{T}\mathbf{C}_{\Theta\mu}\mathbf{V}_{\mu}^{T} = \mathbf{R}_{\mu i},$$

где $\mathbf{V}_{\mu} = \left\| \frac{\partial\ \overset{()}{\mu}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right\|$.

С учетом последнего выражения i-й блок $\mathbf{P}_i$ матрицы $\mathbf{P}$ имеет вид

$$\mathbf{P}_i = \left(\mathbf{H}_p^T \mathbf{C}_{\Theta p} \mathbf{H}_p\right)^{-1} \cdot \left[\mathbf{R}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}\right) - \mathbf{R}_1 \mathbf{W}\right] . \tag{11}$$

Подстановка (11) в (10) и далее в (9) позволяет определить КМО оценивания матрицы весовых коэффициентов.

Выводы. Таким образом, точность оценивания матрицы весовых коэффициентов при использования для ее расчета оценки координат объекта, полученной одним из измерителей, зависит от точности определения координат объекта, используемых для расчета МВК, от значения МВК $\mathbf{W}$, которая в свою очередь, как было отмечено ранее, зависит от местоположения объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян С.Т., Хачатуров В.Р. Оптимизация оценивания координат объекта многопозиционной радиолокационной системой при избыточности информации // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т. 37, № 10. – С. 1839 – 1846.*
2. *Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1968. – 576 с.*
3. *Красногоров С.И. Матричный анализ в задачах отыскания экстремумов. – Ногинск: Научно-исследовательский центр 30 ЦНИИ МО, 1998. – 100 с.*
4. *Кулявец Ю.В., Просов А.В. Влияние ошибок оценивания матрицы весовых коэффициентов на точность результирующей оценки местоположения объекта многопозиционной радиолокационной системой при избыточности информации // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 5. – С. 133 – 138.*
5. *Кулявец Ю.В., Богатов О.И., Лабенко Д.П., Молодцов В.А. Анализ точности оценивания матрицы весовых коэффициентов в алгоритме определения координат объекта многопозиционной радиолокационной системой при избыточности информации // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2005. – Вип. 2. – С. 81 – 87.*
6. *Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.*
7. *Кучук Г.А. Оценка адекватности сплайновой интерполяции трафика широкополосной цифровой сети интегрального обслуживания // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 5. – С. 149 – 153.*
8. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.*

Поступила 30.05.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор О.И. Сухаревский, Объединенный научно-исследовательский институт ВС Украины, Харьков.