

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ УДВОИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ С ФАЗОВОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В РЕЖИМЕ КОЛЕБАНИЙ ВТОРОГО РОДА

В.В. Рапин, С.В. Хуторненко, В.Н. Савченко  
(Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков)

*В работе представлено приближенное аналитическое решение укороченных уравнений синхронизированного автогенератора (АГ) с фазовой обратной связью (ФОС), работающего в режиме удвоения частоты. Это позволяет получать простые и достаточно точные выражения для проектирования гармонических удвоителей частоты и их систем.*

***синхронизированный автогенератор, фазовая обратная связь, гармонические удвоители***

**Постановка проблемы.** Применение режима колебаний второго рода является предпочтительным для удвоителей частоты, поскольку в этом случае увеличивается выходное сопротивление усилительного элемента АГ, что ведет к увеличению добротности контура. Дальнейшее совершенствование характеристик устройств с использованием АГ с ФОС, сдерживается отсутствием простых и достаточно точных соотношений, характеризующих взаимосвязь параметров схемы и сигнала синхронизации с параметрами колебаний.

**Обзор литературы.** Синхронизированные одноконтурные LC-АГ вообще и они же в качестве удвоителей частоты гармонических сигналов широко используются не только как источники колебаний, но и при обработке сигналов [1 – 4]. Возможности синхронизированных АГ существенно расширяются, с введением ФОС [5]. Попытка получить аналитическую модель АГ следящего фильтра с ФОС на основе решения укороченных уравнений дана в [6].

**Цель статьи.** Целью статьи является решение укороченных уравнений гармонического удвоителя частоты на базе одноконтурного LC-АГ с ФОС, работающего в режиме колебаний второго рода, аналитическим методом.

**1. Математическая модель АГ в режиме удвоения частоты с ФОС.** Пусть внешний сигнал имеет вид  $e_v = E_v \cos(\omega_c t + \varphi_c)$ . Тогда после формирования ФОС согласно [7] непосредственный сигнал,

синхронизирующий колебания одноконтурного LC-АГ с трансформаторной обратной связью (ОС) (рис. 1), записывается следующим образом  $e = E \cos(\omega_c t + \psi)$ , где фаза описывается разными выражениями в зависимости от типа ОС. Основное уравнение такого АГ:

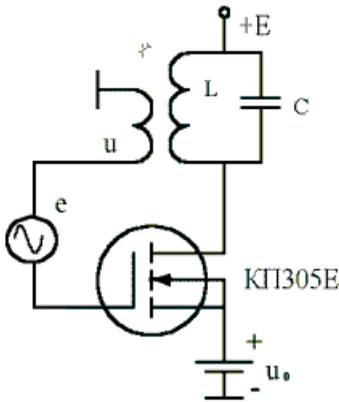


Рис. 1. Удвоитель частоты

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \frac{\omega_0}{\omega_r} kR\delta_k \frac{d}{d\tau} \left( \frac{u}{kR} - i \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} u = 0,$$

где  $\tau = \omega_r t$ ;  $u$  – напряжение положительной ОС (на входе усилительного элемента автогенератора);  $i$  – его ток;  $R, \omega_0$  – резонансные сопротивление и частота контура;  $\delta_k$  – его затухание;  $k$  – коэффициент положительной ОС;  $\omega_r = 2\omega_c$  – частота генерирования.

Нелинейную характеристику усилительного элемента АГ аппроксимируем полиномом

$$i = a_0 + a_1 u_y + a_2 u_y^2 + a_3 u_y^3 + a_4 u_y^4 + a_5 u_y^5 + a_6 u_y^6,$$

где  $u_y = u + e + u_0$ ,  $u_0$  – фиксированное смещение. Считаем, что контур АГ имеет высокую добротность, а фаза сигнала синхронизации является медленно меняющейся функцией, также как амплитуда и фаза колебаний. Тогда решением уравнения, является  $u = A \cos(\omega_r t + \varphi)$ . Используя метод усреднения, получим укороченные уравнения для малых сигналов синхронизации, имеющие вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} (b_0 y^5 + b_1 y^3 + b_2 y) &= \frac{\varepsilon}{2} B_{1(y)} \cos(K\theta^0); \\ \frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)} \sin(K\theta^0) &= -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - 2 \frac{d\varphi_c}{d\tau}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta = \varphi - 2\varphi_c$ ;  $\varepsilon = \delta_k \alpha$  – малый параметр;  $y = A/A_0$  – безразмерная амплитуда;  $A_0$  и  $A$  – амплитуды колебаний в автономном режиме и в режиме синхронизации;  $\Delta\omega/\omega_0 = (2\omega_c - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ ;  $K = 2b + 1$  для отрицательной ФОС,  $b$  – целые положительные числа определяют порядок ФОС,  $b_0, b_1, b_2, B_{1(y)}$  и  $B_{2(y)}$  коэффициенты, зависящие от режима работы АГ;  $\alpha = (kR\alpha_0 - 1) > 0$ ;

$$\alpha_0 = a_1 + 2a_2u_0 + 3a_3u_0^2 + 4a_4u_0^3 + 5a_5u_0^4 + 6a_6u_0^5;$$

параметры:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= a_2 + 3a_3u_0 + 6a_4u_0^2 + 10a_5u_0^3 + 15a_6u_0^4; \\ \gamma_0 &= a_3 + 4a_4u_0 + 10a_5u_0^2 + 20a_6u_0^3; \quad \delta_0 = a_4 + 5a_5u_0 + 15a_6u_0^2; \\ f_0 &= a_5 + 6a_6u_0; \quad g_0 = a_6; \quad \beta = \beta_0/\alpha_0'; \quad \gamma = \gamma_0/\alpha_0'; \quad \delta = \delta_0/\alpha_0'; \\ f &= f_0/\alpha_0'; \quad g = g_0/\alpha_0'; \quad \alpha_0' = 1/(kR) - \alpha_0. \end{aligned}$$

Уравнения (1) являются математической моделью синхронизированного одноконтурного LC-АГ с мягким самовозбуждением в режиме умножения частоты на два. Выражения для коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{5}{8}fA_0^4; \quad b_1 = \frac{3}{4}A_0^2(5fE^2 + \gamma); \quad b_2 = -1 + \frac{3}{2}\gamma E^2 + \frac{15}{8}fE^4; \\ B_{1(y)} &= B_1 + B_2y^2 + B_3y^4; \quad B_{2(y)} = -(B_4/y + B_5y + B_6y^3), \end{aligned}$$

где  $B_1 = -B_4 = -\frac{E^2}{2A_0}(\beta + \delta E^2 + 15/16gE^4)$ ;  $B_2 = -\frac{9}{4}E^2A_0(\delta + 5/2gE^2)$ ;

$$B_3 = -\frac{75}{16}gE^2A_0^3; \quad B_5 = \frac{3}{4}E^2A_0(\delta + 5/2gE^2); \quad B_6 = \frac{15}{16}gE^2A_0^3.$$

Исследования показывают, что колебания АГ Густойчивы. Допустим что  $\theta^0 = 0$ , если  $\Delta\omega/\omega_0 = 0$ , и сигнал синхронизации мал. Считаем, также, что АГ уже синхронизирован и меняется только частота и фаза сигнала синхронизации.

**2. Решение укороченных уравнений.** При решении, согласно [5, 6], полагаем, что  $dy/d\tau = 0$ . Тогда в результате вторичного укорочения получим:

$$\begin{aligned} b_0y^5 + b_1y^3 + b_2y &= B_{1(y)} \cos(K\theta^0); \\ \frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2}B_{2(y)} \sin(K\theta^0) &= -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - 2\frac{d\varphi_c}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение этой системы представляет значительные трудности. Но поскольку интересующим параметром, как правило, является сдвиг фазы, то аппроксимацию уравнений (2) линейным дифференциальным уравнением проведем по этому параметру, для чего запишем их в иной форме:

$$\begin{aligned} b_0y^5 + b_1y^3 + b_2y &= B_{1(y)} \cos(K\theta^0); \\ \theta_b = \theta^0 &= 1/K \arcsin \left[ -(\Delta\omega/\omega_0)_{\text{ЭН}} B_K / B_{(y)} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $B_{(y)} = \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)}$ ,  $B_K = B_{(y)}$  при  $y = y_K$ ,  $y_K$  – значение безразмерной амплитуды колебаний на конце полосы синхронизации при  $|\theta| = \pi/2$ ;  $(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН} = (\Delta\omega/\omega_0)_Э / B_K$  – эквивалентная нормированная расстройка;  $(\Delta\omega/\omega_0)_Э = (\Delta\omega/\omega_0 + 2d\varphi_c/dt + d\theta/dt)$  – эквивалентная расстройка. Легко видеть, что в полосе синхронизации  $-1 \leq (\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН} \leq 1$ . Система уравнений (3) описывает фазовую характеристику синхронизированного АГ  $\theta = f[(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}]$ . Пусть  $B_{2(y)} > 0$  тогда она симметрична относительно начала координат. В определенной части полосы синхронизации фазовая характеристика может быть аппроксимирована линейной функцией в виде

$$\theta_a = \theta^0 = -\frac{1}{K} \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{ЭН} \frac{B_K}{B_0} / (1 - \Delta_c), \quad (4)$$

где  $B_0 = \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y_0)}$ ,  $y_0$  – значение безразмерной амплитуды колебаний, которое находится из первого уравнения системы (3) при  $\theta = 0$ . При оптимальной аппроксимации абсолютные величины погрешностей в точке  $(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(1)} = 0$  и некоторой другой точке  $\left| (\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(2)} \right| < 1$  одинаковы.

Вычисляя их, получим

$$\delta\theta_a^{(1)} = (\theta_a^{(1)} - \theta_b^{(1)}) / \theta_b^{(1)} = \lim \left\{ -(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН} B_K / (B_0 K (1 - \Delta_c)) - \right. \\ \left. - 1 / K \arcsin(-(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН} B_K / B_{(y)}) \right\} / \\ / (1 / K \arcsin(-(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН} B_K / B_{(y)})) = 1 / (1 - \Delta_c) - 1 > 0,$$

$$\text{если } (\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН} \rightarrow 0;$$

$$\delta\theta_a^{(2)} = (\theta_a^{(2)} - \theta_b^{(2)}) / \theta_b^{(2)} = \left\{ -(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(2)} B_K / (B_0 K (1 - \Delta_c)) - 1 / \right. \\ \left. / K \arcsin(-(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(2)} B_K / B_{(y)}) \right\} / (1 / K \arcsin(-(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(2)} B_K / B_{(y)})) = \\ = [ -(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(2)} B_K / (B_0 K / (1 - \Delta_c)) ] / \theta^{0(2)} - 1 < 0.$$

Величину  $\Delta_c$  определяем из равенства  $\delta\theta_a^{(1)} = -\delta\theta_a^{(2)}$ . Тогда

$$\Delta_c = \left[ 1 + \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{ЭН}^{(2)} \frac{B_K}{B_0 K} / \theta^{0(2)} \right] / 2.$$

$\theta^{0(2)}$  фазовый сдвиг, соответствующий расстройке  $(\Delta\omega/\omega_0)_{ЭН}^{(2)}$ , определяемый по фазовой характеристике. Максимальное значение  $\Delta_c = 0,182$  имеет место для самых малых сигналов синхронизации, когда

$B_K/B_0 \approx 1$ , и диапазона частотных расстроек, в котором производится аппроксимация, равному полюсе синхронизации. Далее, подставляя в выражение (4) соотношение для  $(\Delta\omega/\omega_0)_{\text{ЭН}}$ , имеем

$$\frac{d\theta}{d\tau} + B_0 K(1 - \Delta_c) \theta = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - 2 \frac{d\varphi_c}{d\tau}. \quad (6)$$

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** В работе приведено решение укороченных уравнений гармонического удвоителя частоты на базе синхронизированного одноконтурного LC- АГ с ФОС, работающего в режиме колебаний второго рода, методом линейной аппроксимации. Аппроксимация осуществлялась по сдвигу фазы колебаний. Это позволило производить качественный анализ решений, выявлять физическую сущность исследуемых явлений и создавать простые и достаточно точные методики проектирования гармонических удвоителей частоты и их систем. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами легко решается, в отличие от укороченных уравнений (1), позволяет исследовать синхронизированные АГ и их системы и получать простые и достаточно точные выражения, характеризующие взаимосвязь параметров схемы и сигнала синхронизации с параметрами колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянченко Г. Синхронизация генераторов гармонических колебаний. – М.: Энергия, 1976. – 240 с.
2. Daikoku K., Mizushima Y., *Properties of Injection Locking in Linear Oscillator. – International Journal of Electronic. – 1971. – Vol. 31, № 3. – P. 279 – 292.*
3. Болотнев В.В. Функциональные преобразователи на основе связанных генераторов. – М.: Радио и связь, 198. – 87 с.
4. Полулях К.С. Резонансные методы измерений. – М.: Энергия, 1980. – 120 с.
5. Rapin V. *Synchronized oscillators with the phase negative feedback // IEEE Transactions. Circuits and Systems. – 2002. – CAS-49, № 8. – P. 1242 – 1245.*
6. Рапін В.В., Хуторненко С.В. Розробка математичної моделі автогенераторного відслідковуючого фільтру // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС. – 2005. – Вип. 1 (41). – С. 75 – 80.
7. Рапін В.В. Формирование фазовой обратной связи в неавтономных квази-гармонических динамических системах // Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник “Радиотехника”. – 2002. – Вып. 130. – С. 178 – 181.

Поступила 12.06.2005

**Рецензент:** доктор технических наук, профессор В.Д. Сахацкий,  
Украинская инженерно-педагогическая академия.