УДК 621.517

НАУЧНЫЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В БАЗИСЕ ВЕЙВЛЕТОВ

А.С. Клейман[1], В.Н. Романько[2], О.В. Романько[2]
([1]Национальный научный центр "Институт метрологии",
[2]Научный метрологический центр (военных эталонов))

В статье представлено решение задачи формализованного описания измерения спектральных энергетических характеристик случайного процесса в базисе вейвлетов. Проведен сравнительный анализ погрешностей получения спектральной плотности мощности для белого и красного шумов с помощью вейвлетного преобразования и оконного преобразования Фурье.

вейвлетные функции, спектральные энергетические характеристики, случайный процесс, методические погрешности

Введение. Метод получения энергетического спектра случайного процесса, базирующийся на применении вейвлетных функций, находит все более широкое применение при решении целого ряда задач [1 – 3].

Многообразие вейвлетных функций [4, 5], их зависимость от трех параметров: времени, масштаба, сдвига, а также возможность представления этих параметров в непрерывном, дискретном или смешанном виде на бесконечном или ограниченном интервале, позволяет использовать различные подходы при проведении спектрального анализа случайного процесса. В свою очередь, область определения и область существования случайного процесса также может быть представлена на различных интервалах, в непрерывном, дискретном или смешанном виде. Все это, с одной стороны, дает широкие возможности по формированию методов аппаратного спектрального анализа в базисе вейвлетов, а с другой стороны, требует формализации подхода к определению основных метрологических характеристик [6].

Цель работы состоит в разработке основ теории и практики измерения спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов, что позволит обеспечить необходимый метрологический уровень синтеза соответствующих измерительных средств.

Постановка задачи. Пусть $X(t)$ – случайный процесс, время $t \in R$; $x_i(t)$ – i-ая реализация процесса $X(t)$; $x_i(t_k)$ – мгновенное значение процесса $X(t)$, соответствующее значению i-й реализации в k-й момент времени; $x(t_k)$ – k-ая последовательность процесса $X(t)$, представляющая собой совокупность значений реализаций, соответствующих временному сечению t_k.

Вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки [4]

$$W(\gamma, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, \psi_{\gamma,\tau}^{*}(t)\, dt \tag{1}$$

анализируемого случайного процесса с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{\gamma,\tau}(t)$. Параметр $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$, называемый масштабом вейвлетного преобразования, отвечает за ширину вейвлета, а параметр сдвига $\tau \in R$ определяет положение вейвлета на временной оси. При решении задач спектрального анализа имеет смысл рассматривать вейвлет-преобразование случайного процесса как его фильтрацию набором полосовых фильтров [4].

Введем в рассмотрение мгновенное распределение энергии случайного процесса по параметрам вейвлетного преобразования

$$E(\gamma, \tau) = \left|W(\gamma, \tau)\right|^2, \tag{2}$$

которое представляет собой трехмерную случайную поверхность.

При наложении ограничений $\gamma \in R^+$ можно установить однозначную взаимосвязь $\gamma = \omega_0 / \omega$, где ω_0 – постоянный коэффициент; ω – круговая частота Фурье-анализа. При этом анализ распределения энергетических характеристик случайного процесса по масштабам вейвлетного преобразования аналогичен спектральному анализу, в основе которого лежит преобразование Фурье.

Требуется получить решение задачи формализованного описания измерительных процедур и результатов измерений оценок спектральных энергетических характеристик случайного процесса в базисе вейвлетов.

Поставленная задача решается поэтапно по следующей схеме: общие определения – типовые структуры измерений – методические погрешности.

Общие определения. Специфичность вейвлетного преобразования состоит в аппроксимировании исследуемого процесса как во временной, так и в частотной области. Эта особенность позволяет получить спектральную функцию для i-ой реализации для любого k-го момента времени, то есть этот спектр будет характеризовать сечение процесса в текущий момент времени. При этом можно дать следующую физическую интерпретацию вейвлетного спектра (2):

– спектральные точки представляю собой средние энергии сигнала на выходе фильтра соответствующего уровня преобразования и представляют собой энергетическое содержание соответствующего частотно диапазона, а не одной частоты как в случае энергетического спектра Фурье;

– спектральная область вейвлетного спектра характеризуется тремя параметрами: текущим временем анализа, номером уровня декомпозиции, амплитудой и средней частотой.

При рассмотрении вейвлетного спектра сглаживание может выполняться как во временной (τ), так и в маштабной (γ)областях.

Таким образом, для i-й реализации можно получить интегральный вейвлетный спектр энергии

$$I_i(\gamma) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| W_i(\gamma, \tau) \right|^2 d\tau \, , \tag{3}$$

а также мгновенное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования, определяемое как вертикальное сечение вейвлетной поверхности $W(\gamma, \tau)$ в некоторый k-й момент времени $t_k = \tau_0 = \text{const}$:

$$I_{i,t_k}(\gamma) = \left| W_i(\gamma, \tau_0) \right|^2 . \tag{4}$$

Интегральный вейвлетный спектр энергии для совокупности ансамбля последовательностей представим в виде

$$I_{t_k}(\gamma) = \lim_{J \to \infty} \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{J} \left| W_i(\gamma, \tau_0) \right|^2 \, . \tag{5}$$

Средний вейвлетный спектр энергии случайного процесса определим следующим образом:

$$I_{cp}(\gamma) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ J \to \infty}} \frac{1}{JT} \sum_{i=1}^{J} \int_0^T \left| W_i(\gamma, \tau_k) \right|^2 d\tau \, . \tag{6}$$

При конечных J и T выражения (3), (5), (6) соответствуют оценкам, которые в дальнейшем будем обозначать звездочкой (*). В общем виде результат определения значения энергетической характеристики $I^*(\gamma)$ представим в виде

$$I^*(\gamma) = C \cdot \left| W^K(x_i) \right|^2 , \tag{7}$$

где C – соответствующий идеальный оператор усреднения; W^K – оператор конечного вейвлетного преобразования i-й реализации случайного процесса.

Из-за конечности входящих в оценку числа членов операторов усреднения измеренные оценки энергетических характеристик (3), (5), (6), получаемые с помощью разложения по базису ортогональных вейвлетных функций по виду (7), всегда будут смещенными и несостоятельными. При этом естественный интерес представляет сравнительный анализ погрешностей методов получения таких характеристик.

Типовые структуры измерений. Относительная свобода в выборе вейвлетных функций позволяет получить различные виды вейвлетных преобразований. Наиболее широкое распространение получили интегральное вейвлетное преобразование, вейвлетные ряды, вейвлетные рамки (фреймы), ортонормальные вейвлетные базисы.

При этом можно на основании (1), (2) и (7) сформировать типовую структуру измерителя (анализатора) вейвлетного энергетического спектра (рис. 1).

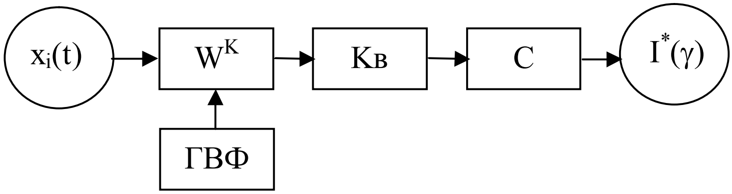

Рис. 1. Типовая структура анализатора вейвлетного спектра

В состав данного функционального преобразователя помимо устройств, реализующих операции вейвлетного преобразования W^K, усреднения C, входят устройство возведения в квадрат Кв и генератор вейвлетных функций ГВФ. Аналогичным образом можно построить типовые структуры, реализующие алгоритмы (3) – (6), которые помогут решить метрологические проблемы, возникающие при рассмотрении принципов построения и вариантов аппаратерной реализации вейвлетных анализаторов спектров случайных сигналов.

Методические погрешности. Провести анализ погрешностей результатов измерений оценок спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов на аналитической основе достаточно проблематично. Поэтому для получения методических погрешностей результатов измерений воспользуемся имитационным моделированием алгоритмов измерения спектральных энергетических характеристик с имитацией входных сигналов типа белый и красный шум. Моделирование проводилось в системе компьютерной математики MATLAB с использованием пакетов Wavelet Toolbox и Simulink.

Относительная свобода в выборе вейвлетных функций позволяет получить различные виды вейвлетных преобразований. Наиболее широкое распространение получили интегральное вейвлетное преобразование, вейвлетные ряды, вейвлетные рамки (фреймы), ортонормальные вейвлетные базисы. С нашей точки зрения, определенный интерес представляет кратномасштабный анализ (КМА) с представлением базисных функций в диадной форме [5].

В соответствии с концепцией КМА, i-я реализация случайного процесса $X(t)$ может быть представлена в виде линейной комбинации грубой формы представления и дополнительной детальной формы представления:

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a^{(i)}_{n_0,m}\varphi_{n_0,m}(t) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty} d^{(i)}_{n,m}\psi_{n,m}(t),$$

где спектральные коэффициенты $a_{n_0,m}$, $d_{n,m}$ определяются из условия ортогональности базисных функций; $\varphi_{n_0,m}(t) = 2^{n_0/2}\varphi(2^{n_0}t - m)$ – множество смещенных во времени скейлинг-функций КМА на уровне n_0; $\psi_{n,m}(t) = 2^{n/2}\psi(2^n t - m)$ – множество базисных вейвлет-функций, которые образуются смещением и масштабированием материнской вейвлетной функции.

Результаты моделирования представлены на рис. 2.

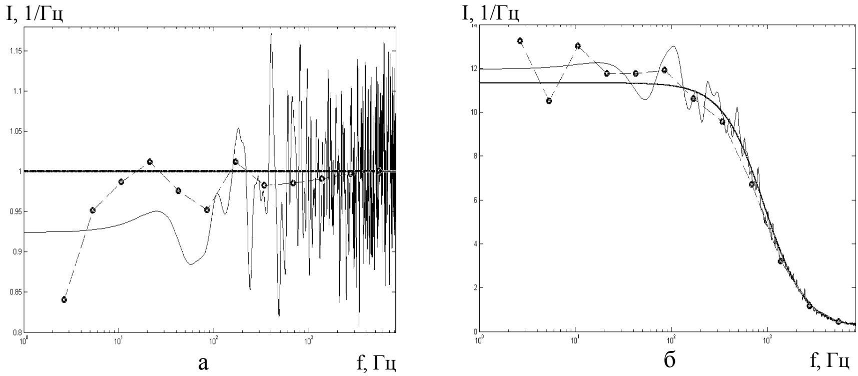

Рис. 2. Спектральная плотность мощности шумов: а – белого, б – красного:
теоретическое значение;
преобразование Фурье (усреднение по оси частот, окно Хэмминга);
o- - -o диадное вейвлетное преобразование (усреднение по оси времени, вейвлет Добеши db8)

Среднеквадратическое отклонение полученных результатов оценок спектральной плотности мощности от теоретических значений составило при вейвлетном преобразовании 0,013 для белого и 0,23 для красного шума. При использовании преобразования Фурье 0,016 и 0,26, соответственно. Таким образом, усреднение по времени и усреднение по частоте при оценке параметров шума дало приблизительно одинаковые результаты.

Выводы. Полученные выражения (3) – (6), во-первых, адекватны существу измерительной задачи, позволяя получить оценки измерения спектральных характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов с использованием реализаций и последовательностей. Во-вторых, открывают широкие возможности использования методов и результатов математической статистики за счет применения идеальных операторов усреднения. Кроме того, показано, что интегральное распределение энергии вейвлетного спектра дает объективную оценку спектральной плотности временного ряда, моделирующего как белый шум, так и красный шум (авторегрессионный процесс с единичным запаздыванием).

Предметом дальнейших исследований является корректность введенных определений (3), (4), (6) с точки зрения сходимости выборочных средних энергетических характеристик, полученных в базисе вейвлетов, к спектральным характеристикам случайных процессов.

В перспективе рассмотренный подход к решению задачи описания измерительных процедур и результатов измерений оценок спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов может быть использован при разработке современной измерительной техники и изучении ее возможностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Л.В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов // Научное приборостроение. – 2000. – Т. 10, № 3. – С. 57 – 64.*
2. *Christopher Torrrnce and Gilbert P. Compo. A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. – 1998. – V.79. – P. 61.*
3. *Клейман А.С., Романько О.В. Распределение энергии сигнала по шкале вейвлетного преобразования // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 11 (39). – С. 75 – 78.*
4. *Переберин А.В. О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные системы и программирование. – 2001. – Т. 2. – С. 15 – 40.*
5. *Чуи К. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. / Под ред. Я.М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412с.*
6. *Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 256 с.*

Поступила 1.06.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Ю.В. Стасев,
Харьковский университет Воздушных Сил.