УДК 621.396.96

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЯ КОДОВ ФАЗЫ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ЧМ СИГНАЛОВ

Н.П. Кандырин,[1] А.М. Дзигора[2]
([1]Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков,
[2]Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба)

Рассмотрены особенности построения полиномиальных цифровых вычислителей кодов фазы (ВКФ) простых и сложных сигналов. Получены математические модели ВКФ, применяемых в цифровых синтезаторах сигналов (ЦСС) и для формирования модулирующего напряжения в фазовых модуляторах.

полиномиальный цифровой вычислитель кодов фазы, цифровой синтезатор сигналов, математическая модель

Постановка проблемы. В настоящее время функции синтеза простых и сложных сигналов при модернизации существующих и разработке перспективных образцов радиоэлектронного вооружения возложены, в основном, на цифровые синтезаторы сигналов.

Наиболее перспективными для формирования радиолокационных сигналов с гибким изменением в широких пределах частотно-временных параметров, являются ЦСС вычислительного типа. Основным элементом таких ЦСС является цифровой вычислитель кодов фазы [1 – 5]. При формировании любого вида ЧМ сигнала в ВКФ вычисляется его последовательность кодов фазы, значения которых в дискретные моменты времени определяются номером такта работы устройства. Емкость ВКФ напрямую зависит от требуемой точности установки начальных параметров, их шага перестройки и качества выходных сигналов [2, 4, 5].

Поэтому анализ точности вычисления кодов фазы, особенно на этапе проектирования, с помощью математической модели, которая воспроизводит наиболее важные черты оригинала, является актуальной научно-технической задачей при синтезе как простых, так и сложных ЧМ сигналов.

Анализ литературы. При цифровом формировании сложных радиолокационных сигналов требуемый закон ЧМ или ФМ задается, как правило, в виде степенного многочлена

$$f(t)=\sum_{s=0}^{m-1} B_s t^s ; \qquad \varphi(t)=\sum_{s=0}^{m} C_s t^s . \tag{1}$$

Вычисление значений $\varphi(t_r)$ в дискретные моменты времени $t_r = rT$ можно реализовать алгоритмически на базе универсальных ЭВМ или микропроцессоров. Однако с точки зрения унификации, миниатюризации, экономичности, быстродействия и надежности, во многих случаях более эффективны специализированные вычислители. К таким устройствам относятся и цифровые синтезаторы сигналов, построенные на основе вычислителей кодов фазы. ВКФ представляет собой полиномиальный функциональный преобразователь информации (ФПИ), воспроизводящий в процессе работы полином [6]

$$K_{\varphi}(r)=\sum_{s=0}^{m} A_s r^s\ , \tag{2}$$

для вычисления которого обычно используют схему Горнера [6] (рис. 1).

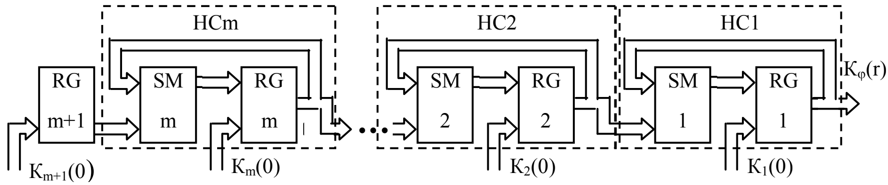

Рис. 1. Структурная схема полиномиального ВКФ (схема Горнера)

Многочлен (2) получается из (1) путем замены переменной t_r = rT с учетом того, что емкость ВКФ эквивалентна 2π, а коды представляют собой целые числа. Связь между коэффициентами A_s и C_s определяется выражением

$$A_S=\frac{C_S T^S N}{2\pi}=\frac{C_S T^S 2^n}{2\pi}\ , \tag{3}$$

где T – период дискретизации; N и n – емкость и число разрядов ВКФ.

При цифровом синтезе сигналов, когда независимой переменной является время t_r = rT, в качестве линейных блоков используются цифровые интеграторы, которые после введения начальных кодов воспроизводят полином (2). В качестве интеграторов в цифровой технике используются накапливающие сумматоры (НС), в которые независимая переменная вводится в виде последовательности тактовых импульсов r = 1, 2, 3, … .

Однако в полиномиальных ЦСС необходимо учитывать, что при подаче кода K_j на j-й НС, соответствующий код фазы на выходе НС1 (рис.1) запаздывает на время τ = jT. Наличие запаздывания не сказывается на законе ЧМ при синтезе сигналов $U(t)=U_0\sin(C_S t^S)$, когда все коэффициенты полинома, за исключением одного, равны нулю. В противном случае на выходе устройства формируется колебание

$$U(t)=U_0\sin\left(\sum_{s=0}^{m} C_S (t-sT)^s\right), \tag{4}$$

закон ЧМ которого не совпадает с заданным.

Указанный недостаток устраняется двумя способами. В первом случае все НС начинают работать одновременно (рис. 2).

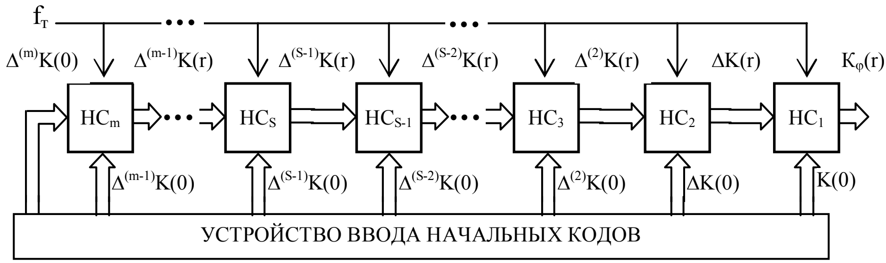

Рис. 2. Структурная схема ВКФ с одновременной синхронизацией НС

Во втором случае (рис. 3) начало работы каждого НС смещается относительно друг друга, и на выходе $НС_1$ формируется код фазы, в точности равный требуемому, но задержанный на время $t = (m+1)T$.

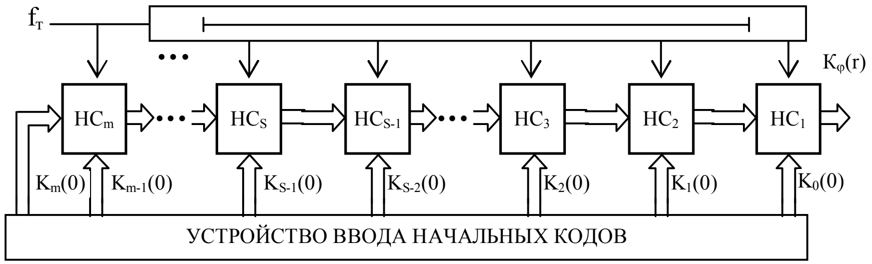

Рис. 3. Структурная схема ВКФ с задержкой синхронизации НС

Процессы вычисления кодов фазы сигналов в ВКФ, в первом и втором случаях частично были рассмотрены в [1, 2, 4], однако для создания их математической модели этого было явно недостаточно.

Целью статьи является разработка математической модели ВКФ, как одного из составных узлов унифицированного синтезатора простых и сложных ЧМ сигналов и формирователя модулирующего напряжения в фазовых модуляторах, для их моделирования на этапе проектирования и разработки.

Основной раздел. Прежде чем найти выражение, описывающее математическую модель ВКФ, для простоты рассуждений, проанализируем его работу по схеме, приведенной на рис. 2.

В регистры накапливающих сумматоров перед началом работы ЦСС вводятся соответствующие начальные коды: $K_\varphi(0)$, $\Delta K_\varphi(0)$, $\Delta^{(2)}K_\varphi(0)$, ... , $\Delta^{(S)}K_\varphi(0)$, ... , $\Delta^{(m)}K_\varphi(0)$, где $\Delta^{(S)}K_\varphi(0)$ – разность порядка s, равная

$$\Delta^{(s)}K_\varphi(r) = \Delta^{(s-1)}K_\varphi(r+1) - \Delta^{(s-1)}K_\varphi(r) \ . \quad (5)$$

С приходом первого тактового импульса (r = 1) содержимое каждого предыдущего $НС_s$ суммируется с содержимым последующего $НС_{s-1}$, в регистр которого при этом записывается код – результат сложения

$$\Delta^{(s-2)}K_{\varphi}(1)=\Delta^{(s-2)}K_{\varphi}(0)-\Delta^{(s-1)}K_{\varphi}(0), \tag{6}$$

а содержимое $НС_m$ увеличивается на величину

$$\Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(1)=\Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(0)-\Delta^{(m)}K_{\varphi}(0). \tag{7}$$

В регистре последнего $НС_1$ образуется код фазы $K_{\varphi}(1)$, равный

$$K_{\varphi}(1)=K_{\varphi}(0)+\Delta K_{\varphi}(0). \tag{8}$$

В результате поступления на ВКФ r тактовых импульсов, в регистрах НС установятся коды соответствующих чисел:

$$\begin{cases} \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(r)=\Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(0)+r\Delta^{(m)}K_{\varphi}(0); \\ \quad \cdots \\ \Delta^{(s)}K_{\varphi}(r)=\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)+\sum\limits_{j=s+1}^{m}\left[\dfrac{\Delta^{(j)}K_{\varphi}(0)}{(j-s)!}\prod\limits_{i=0}^{j-s-1}(r-i)\right]; \\ \quad \cdots \\ K_{\varphi}(r)=K_{\varphi}(0)+\sum\limits_{j=1}^{m}\left[\dfrac{\Delta^{(j)}K_{\varphi}(0)}{j!}\prod\limits_{i=0}^{j-1}(r-i)\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, что для точного воспроизведения полинома (2) с заданными коэффициентами A_s необходимо установить функциональную зависимость между ними и начальными значениями $K_{\varphi}(0)$, $\Delta K_{\varphi}(0)$, $\Delta^{(2)}K_{\varphi}(0)$,..., $\Delta^{(S)}K_{\varphi}(0)$, $\Delta^{(m)}K_{\varphi}(0)$, где $s = 1, 2, ..., m$.

Воспользовавшись выражением, определяющим разность порядка s через значения ординат решетчатой функции $K_{\varphi}(r)$, получаем [6]

$$\Delta^{(s)}K_{\varphi}(r)=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\cdot K_{\varphi}(r+s-k). \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражение для $K_{\varphi}(r)$ и считая $r = 0$, получаем

$$\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)=\sum_{k=0}^{s}\left[(-1)^k\cdot C_s^k\cdot\sum_{i=1}^{m}A_i(s-k)^i\right], \tag{11}$$

где $C_s^k=s!/(k!(s-k)!)$ – число сочетаний из s элементов по k.

Очевидно, что $K_{\varphi}(0)=A_0$, $\Delta^{(0)}K_{\varphi}(0)=A_m m!$, а разности $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$ определяются зависимостью (11). Так, например, для полинома пятой степени $K_{\varphi}(r)=A_0 + A_1r + A_2r^2 + A_3r^3 + A_4r^4 + A_5r^5$ имеем:

$$\begin{aligned} &\Delta^{(5)}K_{\varphi}(0)=120A_5; \quad \Delta^{(4)}K_{\varphi}(0)=24A_4+240A_5; \\ &\Delta^{(3)}K_{\varphi}(0)=6A_3+36A_4+150A_5; \quad \Delta^{(2)}K_{\varphi}(0)=2A_2+6A_3+14A_4+30A_5; \\ &\Delta K_{\varphi}(0)=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5; \quad K_{\varphi}(0)=A_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Начальные условия, получаемые из (12), вводятся в ВКФ округленными до целых чисел, что обуславливает погрешность округления, зависящую от разрядности регистров НС. Вследствие округления, каждый из начальных кодов будет выражаться с ошибкой, и вместо значений $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$ и $K_s(0)$ в интеграторы вводятся числа

$$K_s^*(0) = \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + \delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)] = \mathrm{ent}\{\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + 0{,}5\}, \qquad (13)$$

где $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$ и $K_s(0)$ – требуемые значения начальных кодов; $\delta[\Delta^{(S)}K_{\varphi}(0)]$ и $\delta[K_S(0)]$ – погрешности округления; ent {} – оператор выделения целой части числа.

По абсолютной величине погрешности $\delta[\Delta^{(S)}K_{\varphi}(0)]$ и $\delta[K_S(0)]$, очевидно, не должны превышать половины единицы младшего разряда НС, т.е.

$$\delta\left[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)\right] \le \left(2^{n+1}\right)^{-1}; \quad \delta K_s(0) \le \left(2^{n+1}\right)^{-1}$$

Так как НС имеют ограниченную разрядность, то на выходе ВКФ формируется последовательность кодов фазы по модулю $N = 2^n$.

Таким образом, математическая модель ВКФ, представленного на рис. 2, будет иметь следующий вид

$$K_{\varphi}(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^{m}\left[\frac{K_s^*(0)}{s!}\prod_{i=0}^{s-1}(r-i)\right] - N\mathrm{ent}\left\{\frac{1}{N}\left(K_0^*(0) + \sum_{s=1}^{m}\left[\frac{K_s^*(0)}{s!}\prod_{i=0}^{s-1}(r-i)\right]\right)\right\}, \quad (14)$$

где начальные коды $K_s^*(0)$, предварительно записываемые в регистры НС, рассчитываются согласно (13). Вычитание в (14) реализуется автоматически при переполнении ВКФ, емкость которого эквивалентна 2π радиан.

Рассуждая аналогичным образом, получаем математическую модель ВКФ, представленного на рис. 3:

$$K_{\varphi}(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^{m}\left[\frac{K_s^*(0)}{s!}\prod_{i=0}^{s-1}(r+i)\right] - N\mathrm{ent}\left\{\frac{1}{N}\left(K_0^*(0) + \sum_{s=1}^{m}\left[\frac{K_s^*(0)}{s!}\prod_{i=0}^{s-1}(r+i)\right]\right)\right\}, \quad (15)$$

где начальные коды $K_s^*(0)$ рассчитываются согласно выражения

$$K_s^*(0) = K_s(0) + \delta[K_s(0)] = \mathrm{ent}\{K_s(0) + 0{,}5\}.$$

Например, при цифровом формировании ЛЧМ сигнала закон изменения его фазы описывается полиномом второй степени (m = 2)

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2\pi f_н t + \pi\beta t^2,$$

а минимальный по аппаратурным затратам ВКФ содержит два НС и в процессе работы воспроизводит последовательность кодов фазы (рис. 4)

$$K_{\varphi}(r) = K_{\varphi o} + rK_{fн} + \frac{r(r-1)}{2}K_{\beta} - N\mathrm{ent}\left\{\frac{1}{N}\left[K_{\varphi o} + rK_{fн} + \frac{r(r-1)}{2}K_{\beta}\right]\right\},$$

где $K_{\varphi_0}, K_{f_н}$ и K_β – соответственно, код начальной фазы, частоты и скорости ЧМ, определяемые соотношениями:

$$K_{\varphi o} = \mathrm{ent}\left\{\frac{\varphi_0 N}{2\pi} + 0{,}5\right\}; \quad K_{fн} = \mathrm{ent}\left\{\frac{f_н N}{f_т} + \frac{\beta N}{2f_т^2} + 0{,}5\right\}; \quad K_\beta = \mathrm{ent}\left\{\frac{\beta N}{f_т^2} + 0{,}5\right\}.$$

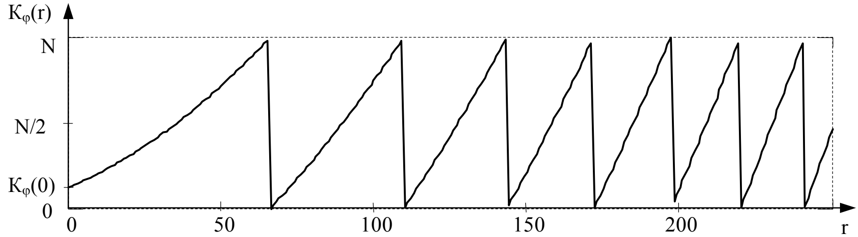

Рис. 4. Диаграмма работы ВКФ при m=2

Таким образом, полиномиальную последовательность кодов фазы любого сигнала можно воспроизвести цепочкой цифровых накопителей.

Выводы. Полученные математические модели ВКФ однозначно связаны с начальными параметрами формируемых ЧМ сигналов и позволяют моделировать процессы формирования в них кодов фазы сигналов любой сложности. При этом учитываются и ошибки округления начальных кодов, обусловленные ограниченной разрядностью накапливающих сумматоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочемасов В.Н., Белов Л.А., Оконешников В.С. Формирование сигналов с линейной частотной модуляцией. – М.: Радио и связь, 1983. – 192 с.*
2. *Кандырин Н.П., Дзигора А.М. Методика определения параметров цифровых синтезаторов по величине искажений сжатых ЛЧМ сигналов в РЛС различного назначения // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 4 (20). – С. 219-224.*
3. *А.С. 1578799 (СССР). Цифровой синтезатор частот / Н.П. Кандырин, Ю.М. Романов, С.А. Соколов. – Опубл. в Б.И., 1990, № 26.*
4. *Зайцев А.Л. Цифровые синтезаторы сигналов с частотной модуляцией и их применение при радиофизических исследованиях планет. – Дисс. канд. техн. наук. – М.: ИРЭ АН СССР. – 1980. – 231 с.*
5. *Кандырин Н.П., Дзигора А.М. К вопросу о расширении частотного диапазона формируемых сигналов в цифровых синтезаторах // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, НАНУ, ПАНМ. – 2002. – Вип. 5 (21). – С. 88-92.*
6. *Смолов В.Б. Функциональные преобразователи информации. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. – 248 с.*

Поступила 31.01.2006

Рецензент: доктор технических наук, профессор В.А. Лошаков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.