УДК 519.95:62-50

МНОГОПРОДУКТОВАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА КОНТИНУАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Г.Н. Жолткевич, Али Найф Халил АльхЖуж
(Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина)

Предложен вариант решения задачи поиска оптимального решения задачи о многопродуктовом потоке, основанный на методах решения задач континуального линейного программирования.

многопродуктовая транспортная задача, континуальное линейное программирование

Введение. Теория кластеров возникла из исследований М. Портера, который системно изучал конкуренцию, как явление, присущее всем рынкам [1]. Прикладные исследования, конкретизирующие задачи, связанные с технологическими цепочками и кластерами, набирают интенсивность и многообразие (см. перечень литературы в [2]). Поэтому данное исследование актуально.

Кластеры имеют структуру, которая может быть достаточно адекватно описана потоковыми графами. Логистические процессы, происходящие в кластерах, представимы моделями, относящимися к классу распределительных задач континуального линейного программирования [4].

В статье ставится **цель** сформулировать и исследовать многопродуктовую транспортную задачу, относящуюся к задачам континуального линейного программирования.

Особую роль для кластеров играет транспортная система, посредством которой происходит транспортирование полупродуктов к местам переработки. В данном случае мы имеем дело с процессами, связанными с многопродуктовыми потоками и многопродуктовыми транспортными задачами имеющими дискретно-непрерывный характер.

Рассмотрим далее соответствующую **постановку задачи**. Для этого введем необходимые обозначения: $x_{ij}^{k}(t)$ – поток k-го продукта из i-го источника в j-й сток в момент времени t; $c_{ij}^{k}(t)$ – стоимость транспортировки единицы этого продукта; $a_{i}^{k}(t)$, $b_{j}^{k}(t)$ – соответственно предложение узла i и спрос узла j для k-го продукта в момент времени t; $u_{j}^{k}(t)$ – пропускная способность дуги (i, j).

Математическая постановка динамической многопродуктовой транспортной задачи имеет следующий вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{k}(t)\, x_{ij}^{k}(t)\, dt \to \min\,, \tag{1}$$

при условии, что:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{k}(t)\, dt \ge b_j^k \ \text{ для всех } j, k\,; \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k}(t)\, dt \le a_i^k \ \text{ для всех } i, k\,; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{ij}^{k}(t) \le u_{ij}(t) \ \text{ для всех } i, j\,; \tag{4}$$

$$x_{ij}^{k}(t) \ge 0 \ \text{ для всех } i, j, k\,; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^k = \sum_{j=1}^{n} b_j^k \ \text{ для всех } k\,. \tag{6}$$

Критерий (1) и (2) – (6) ограничения допускают следующую интерпретацию. Критерий означает требование организовать транспортировку r видов продуктов через сеть в течении интервала времени $[t_0, t_1]$ с минимальными общими затратами. Неравенства (2) интерпретируется как условие обеспечения суммарного спроса потребителей j $(j = 1,\ldots,n)$ за период времени $[t_0, t_1]$. Неравенства (3) характеризует суммарные возможности поставщиков i $(i = 1,\ldots,m)$ за тот же период времени. Группа неравенств (4) задает ограничения на объемы перевозок по дугам сети с учетом их пропускных способностей. Система неравенств (5) выражает естественное требование на неотрицательность многопродуктового потока, проходящего через сеть в динамике. Последняя система равенств означает выполнение условий баланса: для каждого продукта суммарное интегральное предложение равно суммарному интегральному спросу.

Основное содержание работы. Как утверждается в [3, С. 427], задача о максимальном многопродуктовом потоке, так же как и задача о многопродуктовом потоке минимальной стоимости, является весьма сложной.

В [2] был предложен следующий подход к решению задачи (1) – (6).

А. Перейти от непрерывной постановки к дискретной.

Б. Выполнить декомпозицию многопродуктового потока в несколько однопродуктовых.

В. Выполнить агрегирование сети до получения плоской.

Г. Применить алгоритм отыскания потока минимальной стоимости.

Харьковскими учеными разрабатываются новые эффективные методы решения задач подобные сформулированной выше, названные ими задачами континуального линейного программирования [4].

Рассмотрим далее подход к решению задачи (1) – (6), основанный на идеях континуального линейного программирования. Представляется разумным свести трех-индексную задачу (1) – (6) к одноиндексной вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{L} c_l(t) x_l(t) dt \to \min , \qquad (7)$$

при условии, что:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{i_{ik}} x_l(t) dt \geq b_j^k \text{ для всех } j,k ; \qquad (8)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{j_{ik}} x_l(t) dt \leq a_i^k \text{ для всех } i,k ; \qquad (9)$$

$$\sum_{l=1}^{k_{ij}} x_l(t) \leq u_{ij}(t) \text{ для всех } i,j ; \qquad (10)$$

$$x_l(t) \geq 0 \text{ для всех } l = 1,\dots,L ; \qquad (11)$$

$$\sum_{l=1}^{l_i} a_l = \sum_{l=1}^{l_j} b_l \text{ для всех } k. \qquad (12)$$

В критерии (7) и соотношениях (8) – (12) суммирование производится соответственно по всем индексам и по приоритетным, что отражено в верхних пределах суммирования.

Если в ограничения (8) – (10) добавить искусственные переменные $y_{ij}(t) \geq 0$, добиваясь выполнения равенств:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{i_{ik}} x_l(t) dt - y_{jk} = b_j^k \text{ для всех } j,k ; \qquad (13)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{j_{ik}} x_l(t) dt + y_{ik} = a_i^k \text{ для всех } i,k ; \qquad (14)$$

$$\sum_{l=1}^{k_{ij}} x_l(t) + y_{ij} = u_{ij}(t) \text{ для всех } i,j , \qquad (15)$$

то получим так называемую распределительную задачу континуального линейного программирования (КЛП) (см. [4, С. 131]). Для нее доказан ряд свойств типа выпуклости допустимого множества решений, единственности решения, сформулирован признак оптимальности решения (см. [4], глава 5).

Если, наконец, в (15) выполнить преобразование

$$\sum_{l=1}^{k_{ij}} x_l(t)/u_{ij}(t)+y_{ij}/u_{ij}(t)=1 \text{ для всех } i,j \tag{16}$$

и сохранить при этом прежние обозначения в задаче

$$\sum_{l=1}^{k_{ij}} x_l(t)+y_{ij}=1 \text{ для всех } i,j, \tag{17}$$

получим транспортную задачу КЛП.

Поскольку нас интересует поиск оптимального решения задачи о многопродуктовом потоке, рассмотрим алгоритм ее решения.

Обозначим множество вектор-функций $X(t)=\{x_l(t)\}$, удовлетворяющих ограничениям (8, 9, 11, 13) через U, а $X^*(t)$ – решение задачи (7) – (13). Пусть U^* – множество таких решений. Из результатов [4] следует, что U^* не пусто.

Задаче КЛП (7)-(13) поставим в соответствие двойственную задачу: найти набор $\Lambda=\{\lambda_i\}$ и функцию $\lambda(t)$, доставляющие минимальное значение функционалу

$$\tilde{Z}(\Lambda,\lambda(t))=\sum_{i=1}^{L} b_i\lambda_i+\int_{t_0}^{t_1}\lambda(t)dt \tag{18}$$

и удовлетворяющие ограничениям

$$\lambda_i+\lambda(t)\ge c_i(t), i=1,...,L. \tag{19}$$

Заметим, что в критерии (18) под знаком суммы для единообразия обозначений использован символ b. Для двойственной транспортной задачи КЛП в [4] построена теория, которая позволяет сформулировать задачу безусловной минимизации функции вида

$$\Phi(\Lambda)=\sum_{i=1}^{L} b_i\lambda_i+\int_{t_0}^{t_1}\max_{l\in\{1,...L\}}\{c_l(t)-\lambda_l\}dt \tag{19}$$

по набору переменных $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_L\}$. В результате приходим к факту, что последняя задача может быть решена путем применения градиентных алгоритмов.

Действительно, вводя интервалы мажорирования функций $\tau_i(\Lambda)=\{t:\max\limits_{l\in\{1,...L\}}\{c_l(t)-\lambda_l\}=c_i(t)-\lambda_i\}, i=\{1,...,L\}$, получим p_i подынтервалов $[t_{ki}^-(L),t_{ki}^+(L)], k=1,2,...,p_i$. Это позволяет частные производные функции (19), которые имеют вид

$$\frac{\partial\Phi(\lambda)}{\partial\lambda_i}=b_i-\sum_{k=1}^{p_i}\tau_{ki}, i\in\{1,...,L\}, \tag{20}$$

где τ_{ki} – длина k-го интервала мажорирования для функции $f_i(t)=c_i(t)-\lambda_i$.

Далее осуществляем итерационный процесс, на каждой итерации которого вычисляем вектор $\Lambda^s = \{\lambda^s{}_1, \lambda^s{}_2, ..., \lambda^s{}_L\}$, формируем интервалы мажорирования

$$[t^-_{ki}(L), t^+_{ki}(L)], k = 1, 2, ..., p_i, i = 1, ..., L,$$

вычисляем производные (20), проверяем необходимую точность решения, вычисляем следующее значение $\Lambda^{s+1} = \Lambda^s - \rho \times \mathrm{grad}\Phi(\Lambda^s), 0 < \rho < 1$, сравниваем значения $\Phi(\Lambda^s)$ и $\Phi(\Lambda^{s+1})$. В случае, когда вторая величина не больше первой длину шага ρ уменьшаем в два раза (в противном случае оставляем ρ неизменным) и переходим к следующей итерации. Пусть $\Lambda^* = \{\lambda^*_1, \lambda^*_2, ..., \lambda^*_L\}$ – точка оптимума функции (19). Тогда решение прямой задачи (7), (13) – (17) будет иметь следующий вид

$$x^*_i(t) = \begin{cases} 1, \ t \in \bigcup\limits_{k=1}^{p_i} [t^-_{ki}(\Lambda^*), t^+_{ki}(\Lambda^*)]; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Выводы. Впервые предложен подход к решению задачи о многопродуктовом потоке путем сведения к двойственной транспортной задаче континуального линейного программирования и применения градиентного алгоритма.

Несмотря на своеобразие формулировки задачи континуального линейного программирования ее общие свойства оказались присущи и распределительной задаче. Существенное увеличение количества переменных путем введения искусственных в соотношениях (13) – (17) и трудоемкость отыскания интервалов мажорирования компенсируется задействованием итерационного алгоритма. В этом состоит практическая значимость исследования. Дальнейшие направления исследований предполагают проведение тестовых расчетов для кластера, имеющего конкретную структуру (например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Портер М. Конкуренция: Пер. с англ. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2005. – 608 с.*
2. *Али Найф Халил АльхЖуж, Иващенко П.А. Математическое моделирование деятельности экономического кластера и взаимодействия с вузами // Вісник Харківського національного університету. – 2005. – № 703. – С. 13-24.*
3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 545 с.*
4. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Континуальное линейное программирование. – Х.: Военный ин-т ВВ МВД Украины, 2005. – 176 с.*

Поступила 25.02.2006

Рецензент: доктор технических наук, профессор Л.Г. Раскин,
Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.