УДК 519.859

ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

Л.Г. Евсеева
(Полтавский военный институт связи)

С учетом погрешностей исходных данных строится математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения, в которой размещаемые ориентированные объекты и область размещения имеют пространственную форму прямоугольного параллелепипеда. Учет погрешностей осуществляется на основе использования элементов интервальной геометрии.

комбинаторная оптимизационная задача размещения, ориентированные объекты, пространственная форму прямоугольного параллелепипеда

Введение. При решении оптимизационных задач проектирования [1] учитываются их геометрические особенности: начальные данные, включающие информацию о формах, размерах геометрических объектов, технологические ограничения при размещении этих объектов, а также функцию цели данной оптимизационной задачи. В реальном мире все измерения выполняются с некоторыми погрешностями.

Моделированию и решению идеализированной (без учета погрешностей) оптимизационной задачи размещения параллелепипедов посвящены, например, работы [2, 3]. Однако математические модели идеализированных задач не являются адекватными и не отражают важных особенностей задачи в исходной постановке. Поэтому получаемое решение, в общем случае, является лишь допустимым решением. В данной работе предлагается подход к учету погрешностей на основе применения таких понятий интервальной геометрии [4, 5], как интервальная прямая, интервальная гиперплоскость, интервальный параллелепипед, интервальное касание и интервальное расстояние между выпуклыми интервальными многогранниками, а также понятия элементарного интервального отображения.

Кроме того, оптимизационная задача размещения параллелепипедов рассматривается как комбинаторная оптимизационная задача, что позволит в дальнейшем для реализации ее математической модели использовать известные методы комбинаторной оптимизации.

Постановка задачи. Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в следующей постановке. Пусть имеется конечный набор ориентированных прямоугольных параллелепипедов (в дальнейшем, «параллелепипедов») $P_i \subset R^3$, $i \in J_n = \{1, 2, ..., n\}$, которые однозначно определяются кортежами геометрической информации вида $g_i = \{P_i, (a_i, b_i, c_i)\}$, $i \in J_n$, и область $P_0 \subset R^3$ длиной a_0, шириной b_0 и переменной высотой c_0.

Пусть длина a_i параллелепипеда P_i, $i \in J_n$ имеет исходную погрешность ν_{a_i} по оси абсцисс, ширина b_i – погрешность ν_{b_i} по оси ординат, высота c_i – погрешность ν_{c_i} по оси аппликат. Длина a_0, ширина b_0 области размещения P_0 заданы с погрешностями ν_{a_0}, ν_{b_0} соответственно, причем выполняются неравенства $a_0 \geq a_i$, $b_0 \geq b_i, i \in J_n$.

В данной работе полагаем, что справедливы соотношения:

$$a_i = a,\ b_i = b,\ \forall i \in J_n. \tag{1}$$

Параллелепипеды P_i, $i \in J_n$ ориентированы так, что их основания параллельны основанию параллелепипеда P_0. Полагаем, что начала собственных систем координат параллелепипедов P_i, $i \in J_n^0$ расположены в вершинах нижнего основания $(\langle 0, \nu_{a_i} \rangle, \langle 0, \nu_{b_i} \rangle, \langle 0, \nu_{c_i} \rangle)$, $i \in J_n^0$ и при размещении параллелепипедов допускается лишь трансляция параллелепипеда P_i, $i \in J_n$ на вектор $u_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$. Параллелепипед P_i, $i \in J_n$, с параметрами размещения u_i обозначим $P_i(u_i)$.

Замечание 1. Под величиной c_0 будем понимать число

$$c_0 = \max\left\{c_t, \sum_{i=1, i \neq t}^{n} c_i\right\}, \text{ где } c_t = \max_{1 \leq i \leq n} c_i.$$

Замечание 2. В данном исследовании считаем, что погрешность ν_{c_0} задания c_0 равна нулю, т.е. $\nu_{c_0} = 0$.

Замечание 3. Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что выполняются соотношения:

$$0 \leq \nu_{a_i} \leq \varepsilon \cdot a;\ 0 \leq \nu_{b_i} \leq \varepsilon \cdot b;\ 0 \leq \nu_{c_i} \leq \varepsilon \cdot c_i,\ \forall i \in J_n^0,$$

где значение числа $\varepsilon \in (0, 1) \subset R^1$ характеризует точность задания исходных данных и зависит от конкретной задачи.

Необходимо, приняв во внимание погрешности исходных данных и исходя из особенностей задачи (все параллелепипеды имеют одинаковую длину a и одинаковую ширину b), выполнить разбиение области размещения $P_0 \subset R^3$ конечным числом плоскостей, параллельных кординатным плоскостям xOz и yOz на максимально возможное число подобластей, имеющих форму параллелепипеда, с метрическими характеристиками (a, b, c_0), и разместить множество параллелепипедов P_i, $i \in J_n$, в полученных подобластях таким образом, чтобы высота h занятой части области P_0 и ее погрешность v_h достигали своего минимального значения (h^*, v_h^*).

Для формализации задачи рассмотрим некоторые понятия и определения. Учитывая гомеоморфизм евклидова пространств R^2 и расширенного пространства центрированных интервалов $\mathbf{I_S R}$ [4], установим биекцию между точками интервального пространства $\mathbf{I_S^3 R} = \mathbf{I_S R} \times \mathbf{I_S R} \times \mathbf{I_S R}$ [6] и исходными данными задачи следующим образом:

$$R^2 \ni (x, \nu_x) \leftrightarrow \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_S R}; \qquad (2)$$

$$R^6 \ni (x, \nu_x, y, \nu_y, z, \nu_z) \leftrightarrow (\langle x, \nu_x \rangle, \langle y, \nu_y \rangle, \langle z, \nu_z \rangle) \in \mathbf{I_S^3 R}.$$

Тогда соответствия между элементами множества исходных данных и элементами пространства $\mathbf{I_S R}$ будут иметь вид:

$$(a_i, \nu_{a_i}) \leftrightarrow \langle a_i, \nu_{a_i} \rangle = \langle A_i \rangle, (b_i, \nu_{b_i}) \leftrightarrow \langle b_i, \nu_{b_i} \rangle = \langle B_i \rangle;$$

$$(c_i, \nu_{c_i}) \leftrightarrow \langle c_i, \nu_{c_i} \rangle = \langle C_i \rangle, i \in \{0\} \bigcup J_n = J_n^0.$$

За интервальный ноль примем $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \in \mathbf{I_S R}$.

Тогда, как следует из постановки задачи, а также в соответствии с отношением линейного порядка в пространстве $\mathbf{I_S R}$ [4, 5]

$$\forall \langle X \rangle \in \mathbf{I_S R}, \forall \langle Y \rangle \in \mathbf{I_S R} : \langle X \rangle \le \langle Y \rangle \Leftrightarrow (x < y) \vee ((x = y) \wedge (\nu_x \le \nu_y))$$

справедливы следующие интервальные неравенства [4, 5]:

$$\langle A_i \rangle \ge \mathbf{0}; \ \langle B_i \rangle \ge \mathbf{0}; \ \langle C_i \rangle \ge \mathbf{0}, \ i \in J_n^0.$$

Замечание 4. С учетом замечания 3 поставленная задача рассматривается на множестве $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I_{s1}} \times \mathbf{I_{s1}} \times \mathbf{I_{s1}} \subset \mathbf{I_S^3 R}$, где

$$\mathbf{I_{s1}} = \operatorname{int} \mathbf{I_{s1}} = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_S R} \mid x - |\nu_x| > 0\}.$$

Пусть, следуя работе [7], на множестве $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{I_S^3 R}$ задана интервальная метрика вида:

$$\boldsymbol{\rho}(U_1, U_2) = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_x^2(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) + \boldsymbol{\rho}_y^2(\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle) + \boldsymbol{\rho}_z^2(\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle)} \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\rho}_x(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) = \left\langle |x_1 - x_2|, |\nu_{x_1} - \nu_{x_2}| \right\rangle$; $\boldsymbol{\rho}_y(\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle) = \left\langle |y_1 - y_2|, |\nu_{y_1} - \nu_{y_2}| \right\rangle$;

$\boldsymbol{\rho}_z(\langle Z_1\rangle,\langle Z_2\rangle)=\Big\langle |z_1-z_2|, \Big|\nu_{z_1}-\nu_{z_2}\Big|\Big\rangle$ – интервальные расстояния [7] по осям O(X), O(Y) и O(Z) соответственно между точками:

$$U_i=(\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle,\langle Z_i\rangle)=(\langle x_i,\nu_{x_i}\rangle,\langle y_i,\nu_{y_i}\rangle,\langle y_i,\nu_{y_i}\rangle)\in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R},\ i=1,2;$$

$$\langle X_1\rangle,\langle X_2\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R};\ \langle Y_1\rangle,\langle Y_2\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R};\ \langle Z_1\rangle,\langle Z_2\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}.$$

Рассмотрим в $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ интервальную гиперплоскость [9] $\mathbf{\Pi}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, которая задается интервальным уравнением

$$\varphi(a\cdot\langle X\rangle)+\varphi(b\cdot\langle Y\rangle)+\varphi(c\cdot\langle Z\rangle)+\langle D\rangle=\mathbf{0}, \tag{4}$$

где $U=(\langle X\rangle,\langle Y\rangle,\langle Z\rangle)\in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$; $a,b,c\in R^1$; $\langle D\rangle=\langle d,\nu_d\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$;

$$\varphi(\lambda\cdot\langle X\rangle)=\begin{cases}\lambda\cdot\langle X\rangle, & \text{если } \lambda\ge 0;\\ \lambda\cdot\overline{\langle X\rangle}, & \text{если } \lambda<0;\end{cases},\ \lambda\in R^1,\ \langle X\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}.$$

Интервальное уравнение (4) назовем нормальным интервальным уравнением интервальной гиперплоскости, если $a^2+b^2+c^2=1$ и $\langle D\rangle\le\mathbf{0}$.

На основании определения ориентированной поверхности в арифметическом евклидовом пространстве R^3 введем определение ориентированной интервальной поверхности в интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Определение 1. Интервальное уравнение $\boldsymbol{\omega}(U)=\mathbf{0}$, $U\in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ назовем ориентированным интервальным уравнением интервальной поверхности $\mathbf{F}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, если функция $\boldsymbol{\omega}(U)$ определена на некотором множестве $\mathbf{\Omega}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и знаки значений функций противоположны на интервальных множествах $\mathbf{F}^+\subset\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{F}^-\subset\mathbf{\Omega}$, то есть $\boldsymbol{\omega}(U_1)\cdot\boldsymbol{\omega}(U_2)<\mathbf{0}$ для любых $U_1\in\mathbf{F}^+$ и $U_2\in\mathbf{F}^-$, $\mathbf{frF}^+=\mathbf{frF}^-=\mathbf{F}$, где $\mathbf{frF}$ – интервальная граница.

Составим два интервальных множества:

$$\mathbf{\Pi}^+:\varphi(a\cdot\langle X\rangle)+\varphi(b\cdot\langle Y\rangle)+\varphi(c\cdot\langle Z\rangle)+\langle D\rangle>\langle 0\rangle;\ \mathbf{\Pi}^+\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R};$$

$$\mathbf{\Pi}^-:\varphi(a\cdot\langle X\rangle)+\varphi(b\cdot\langle Y\rangle)+\varphi(c\cdot\langle Z\rangle)+\langle D\rangle<\langle 0\rangle;\ \mathbf{\Pi}^-\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R},$$

на которые интервальная гиперплоскость $\mathbf{\Pi}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, заданная интервальным уравнением (4), разделяет интервальное пространство $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Понятно, что $\mathbf{\Pi}=\mathbf{fr\Pi}^+, \mathbf{\Pi}=\mathbf{fr\Pi}^-$, здесь $\mathbf{frM}$ – интервальная граница [5] интервального множества $\mathbf{M}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$. Нетрудно проверить, что интервальное уравнение (4) удовлетворяет требованиям определения 1 на множестве $\mathbf{\Omega}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и его можно считать ориентированным нормальным интервальным уравнением интервальной гиперплоскости $\mathbf{\Pi} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$. Чтобы изменить ориентацию гиперплоскости, заданной (4), необходимо привести его к виду:

$$\varphi(-a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(-b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(-c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0}.$$

Пусть $\chi_j(U) = \mathbf{0}$, $j \in J_6$ – ориентированные нормальные интервальные уравнения интервальных гиперплоскостей $\mathbf{\Pi}_j$, участвующих в формировании интервальной границы $\mathbf{frP}$ интервального параллелепипеда $\mathbf{P} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Тогда $\mathbf{frP}$ определяется интервальным уравнением

$$\chi(U) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

где

$$\chi(U) = \max_{j=1,2,\ldots,6} \chi_j(U). \tag{6}$$

Определение 2. Интервальным параллелепипедом $\mathbf{P} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ называется интервальное множество, точки которого удовлетворяют условию $\chi(U) \le \mathbf{0}$. Иначе,

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \setminus \mathrm{cl}\,\mathbf{P}) \cup \mathbf{frP}; \ \mathbf{P} = \{U \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \,|\, \chi(U) \le \mathbf{0}\}, \tag{7}$$

где $\chi(U)$ определяется выражением (6).

В арифметическом евклидовом пространстве $R^3 \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ выражения (5) – (7) определяют параллелепипед длиной a_i, шириной b_i, высотой c_i, начало собственной системы координат которого находится в вершине его нижнего основания.

Составим ориентированные интервальные уравнения $\chi_{ij}(U) = \mathbf{0}$ интервальных гиперплоскостей $\mathbf{\Pi}_{ij}$, $i \in J_n$, $j \in J_6$, участвующих в формировании интервальной границы интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_i$:

$$\chi_{i1}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) = \langle X \rangle - \overline{\langle A_i \rangle}; \ \chi_{i2}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) = \langle Y \rangle - \overline{\langle B_i \rangle};$$

$$\chi_{i3}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) = \langle Z \rangle - \overline{\langle C_i \rangle}; \quad \chi_{i4}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) = -\overline{\langle X \rangle} + \langle 0, \nu_{a_i} \rangle; \tag{8}$$

$$\chi_{i5}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) = -\overline{\langle Y \rangle} + \langle 0, \nu_{b_i} \rangle; \ \chi_{i6}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) = -\overline{\langle Z \rangle} + \langle 0, \nu_{c_i} \rangle.$$

Тогда в качестве математической модели параллелепипеда $P_i \subset R^3$, $i \in J_n^0$ длиной a_i, имеющей исходную погрешность ν_{a_i} по оси абсцисс, шириной b_i, имеющей исходную погрешность ν_{b_i} по оси ординат, и высотой c_i, имеющей исходную погрешность ν_{c_i} по оси аппликат, можно принять интервальный параллелепипед $\mathbf{P}_i = (\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \setminus \mathrm{cl}\,\mathbf{P}_i) \cup \mathbf{frP}_i \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i \in J_n^0$, который задается выражениями (6) – (8).

На основе отношения линейного порядка в пространстве $\mathbf{I_sR}$ [2] и по аналогии с определением минимума конечного набора элементов пространства $\mathbf{I_sR}$ определим максимум множества элементов пространства $\mathbf{I_sR}$.

Определение 3. Максимумом конечного набора элементов пространства $\mathbf{I_sR}$ называется $\left\langle X^* \right\rangle \in \mathbf{I_sR}$:

$$\langle X^* \rangle = \langle X_j \rangle = \max\{\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \ldots, \langle X_n \rangle\}, \ j \in J_n,$$

где $\langle X^* \rangle = \langle x^* = x_j = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{x_i\}, \nu_x^* = \nu_{x_j} \rangle$, если $x_i \neq x_j, i \neq j, i \in J_n$,

$\langle X^* \rangle = \langle x^* = x_j, \nu_x^* = \nu_{x_j} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\nu_{x_i}\} \rangle$, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x^*$,

$\langle X^* \rangle = \langle x^* = x_j, \nu_x^* = \nu_{x_j} = \max\limits_{t=1,2,\ldots,m} \{\nu_{x_{i_t}}\} \rangle$, если $x_{i_1} = \ldots = x_{i_m} = x^*, i_t \in J_n, m < n$.

Пусть $\left\langle A_\alpha \right\rangle = \max\limits_{1 \le i \le n} \left\langle A_i \right\rangle, \alpha \in J_n$, $\left\langle B_\beta \right\rangle = \max\limits_{1 \le i \le n} \left\langle B_i \right\rangle, \beta \in J_n$ – максимумы конечных множеств $\{\left\langle A_1 \right\rangle, \left\langle A_2 \right\rangle, \ldots, \left\langle A_n \right\rangle\}$ и $\{\left\langle B_1 \right\rangle, \left\langle B_2 \right\rangle, \ldots, \left\langle B_n \right\rangle\}$, $\left\langle A_i \right\rangle, \left\langle B_i \right\rangle \in \mathbf{I_sR}$, $i \in J_n$ берутся в соответствии с определением 3. Исходя из условия (1), имеем третий случай в определении максимума конечного набора элементов пространства $\mathbf{I_sR}$.

Осуществим разбиение основания параллелепипеда $\mathbf{P_0}$ на $p = k \cdot m$ интервальных прямоугольников, где число k и m интервальных полос по координатным осям $O\langle X \rangle$ и $O\langle Y \rangle$ соответственно, основываясь на введенной в $\mathbf{I_sR}$ операции интервального деления [2] и определении целой части интервального числа [9], вычисляются по формулам:

$$k \in [k_{min}, k_{max}]; \ m \in [m_{min}, m_{max}];$$

$$k_{min} = \left[(a_0 - \nu_{a_0})/(a + \nu_{a_\beta})\right]; \ k_{max} = \left[(b_0 + \nu_{b_0})/(b - \nu_{b_\beta})\right]; \quad (9)$$

$$\left\langle k \right\rangle = \left[\left\langle B_0 \right\rangle \Big/ \left\langle B_\beta \right\rangle \right] = \left\langle \left(\left[\frac{b_0 - \nu_{b_0}}{b_0 + \nu_{b_\beta}^0} \right] + \left[\frac{b_0 + \nu_{b_0}}{b_0 - \nu_{b_\beta}^0} \right] \right) \Big/ 2; \left(\left[\frac{b_0 + \nu_{b_0}}{b_0 - \nu_{b_\beta}^0} \right] - \left[\frac{b_0 - \nu_{b_0}}{b_0 + \nu_{b_\beta}^0} \right] \right) \Big/ 2 \right\rangle;$$

$$m_{min} = \left[(w - \nu_w)/(a + \nu_{a_\alpha})\right]; \ m_{max} = \left[(w + \nu_w)/(a - \nu_{a_\alpha})\right]; \quad (10)$$

$$\left\langle m \right\rangle = \left[\left\langle A_0 \right\rangle \Big/ \left\langle A_\alpha \right\rangle \right] = \left\langle \left(\left[\frac{a_0 - \nu_{a_0}}{a + \nu_{a_\alpha}} \right] + \left[\frac{a_0 + \nu_{a_0}}{a - \nu_{a_\alpha}} \right] \right) \Big/ 2; \left(\left[\frac{a_0 + \nu_{a_0}}{a - \nu_{a_\alpha}} \right] - \left[\frac{a_0 - \nu_{a_0}}{a + \nu_{a_\alpha}} \right] \right) \Big/ 2 \right\rangle,$$

где $[x]$ – целая часть числа $x \in R^1$.

Если $k_{min} = k_{max}$, $m_{min} = m_{max}$, существует единственный вариант разбиения. Построим гиперплоскости, интервально параллельные координатным плоскостям $\langle X\rangle O\langle Z\rangle$ и $\langle Y\rangle O\langle Z\rangle$, интервальные уравнения которых соответственно имеют вид:

$$\langle X\rangle - i\cdot\overline{\langle A_\alpha\rangle} = \langle 0\rangle \text{ и } \langle Y\rangle - j\cdot\overline{\langle B_\beta\rangle} = \langle 0\rangle,\ i\in J_k,\ j\in J_m.$$

Положим $k = k_{min}$, $m = m_{min}$.

Получим разбиение $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_0^{*}\times\mathbf{P}_0^{**}\subset\mathbf{P}_0\subset\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ на $p = k\cdot m$ интервальных параллелепипедов.

Интервально касающиеся множества $\mathbf{P}_{ij}\subset\mathbf{P}_0$, $i\in J_k$, $j\in J_m$ таковы, что:

$$\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{m}\mathbf{P}_{ij}\subseteq\mathbf{P}_0;\ \bigcup_{i=1}^{k}\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_0^{*},\ \mathbf{P}_0^{*}\subseteq\mathbf{P}_0;\ \bigcup_{j=1}^{m}\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_0^{**},\ \mathbf{P}_0^{**}\subseteq\mathbf{P}_0; \tag{11}$$

$$\operatorname{int}\mathbf{P}_{il}\bigcap\operatorname{int}\mathbf{P}_{jl} = \varnothing,\ i,j\in J_k, i\neq j, l\in J_m;\ \operatorname{cl}\mathbf{P}_{il}\bigcap\operatorname{cl}\mathbf{P}_{i+1,l}\neq\varnothing,\ i\in J_{k-1},\ l\in J_m;$$

$$\operatorname{cl}\mathbf{P}_{il}\bigcap cl\,\mathbf{P}_{i,l+1}\neq\varnothing,\ l\in J_{k-1},$$

где $\operatorname{int}(\ )$ и $\operatorname{cl}(\ )$ – топологические внутренность и замыкание множества [9].

Как известно [5], интервальное расстояние между интервальными множествами $\mathbf{M}_1\subset\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_2\subset\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ определяется таким образом

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2) = \min_{\forall U_i\in\mathbf{M}_1,\forall U_j\in\mathbf{M}_2}\boldsymbol{\rho}(U_i,U_j).$$

Известно [7], что интервальное расстояние между интервально параллельными интервальными плоскостями $\mathbf{\Pi}_1\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и $\mathbf{\Pi}_2\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_1,\mathbf{\Pi}_2) = \left\langle |d_1 - d_2|, \left|\nu_{d_1} - \nu_{d_2}\right| \right\rangle,$$

где $\left\langle d_i,\nu_{d_i}\right\rangle$, $i = 1,2$ – свободные члены нормальных интервальных уравнений интервальных плоскостей $\mathbf{\Pi}_i\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i = 1,2$.

Определение 4. Интервальной высотой $\langle H\rangle$ интервального параллелепипеда $\mathbf{P}\subset\mathbf{I}_S^3\mathbf{R}$ назовем интервальное расстояние между интервальными гиперплоскостями, участвующими в формировании интервальной границы $\mathbf{fr\,P}$ и интервально параллельными интервальной координатной плоскости $\langle X\rangle O\langle Y\rangle$.

Очевидно, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_{1i},\mathbf{\Pi}_{2j})$, где $\mathbf{\Pi}_{1i}$, $\mathbf{\Pi}_{2j}$, $i,j\in J_6$ – интервальные плоскости, участвующие в формировании интервальных границ $\mathbf{frP}_1$ и $\mathbf{frP}_2$ соответственно.

Тогда, исходя из определений 1 и 4, а также учитывая вид интервальных уравнений (7) интервальных гиперплоскостей, участвующих в формировании интервальной границы $\mathbf{fr}\,\mathbf{P}_i$, получим интервальную высоту $\langle H_i \rangle = \langle c_i, 2\nu_{c_i} \rangle$ интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_i$, $i \in J_n^0$.

Определение 5. Точки $U_1, U_2 \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ интервально касаются и в пространстве определена интервальная метрика вида (3), то согласно [7], выполняются соотношения:

$$\begin{cases} |\, x_1 - x_2 \,| = \left| \nu_{x_1} + \nu_{x_2} \right|; \\ |\, y_1 - y_2 \,| = \left| \nu_{y_1} + \nu_{y_2} \right|; \\ |\, z_1 - z_2 \,| = \left| \nu_{z_1} + \nu_{z_2} \right|. \end{cases}$$

Таким образом, интервальное расстояние между интервально касающимися точками определяется соотношением:

$$\boldsymbol{\rho}(U_1, U_2) =$$

$$= \sqrt{\left\langle \left|\nu_{x_1} + \nu_{x_2}\right|, \left|\nu_{x_1} - \nu_{x_2}\right| \right\rangle^2 + \left\langle \left|\nu_{y_1} + \nu_{y_2}\right|, \left|\nu_{y_1} - \nu_{y_2}\right| \right\rangle^2 + \left\langle \left|\nu_{z_1} + \nu_{z_2}\right|, \left|\nu_{z_1} - \nu_{z_2}\right| \right\rangle^2}. \quad (12)$$

Пусть в интервальную область $\mathbf{P}_{ij}$, $i \in J_k, j \in J_m$ помещены интервальные параллелепипеды $\mathbf{P}_{ij}^1, \mathbf{P}_{ij}^2, ..., \mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}, ..., \mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$. Найдем интервальное расстояние между ними.

Определение 6. Будем говорить, что два интервальных параллелепипеда $\mathbf{P}_{ij}^t \subset \mathbf{P}_{ij}$ и $\mathbf{P}_{ij}^{t+1} \subset \mathbf{P}_{ij}$, $i \in J_n$, $i \neq j$, расположенных на месте t и $t+1$, $t = 1, 2, ..., r_{ij} - 1$ соответственно в $\mathbf{P}_{ij}$, интервально касаются, если интервальное расстояние между ними находится по формуле:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}) = \left\langle \left| \nu_{c_{ij}^{t+1}} + \nu_{c_{ij}^t} \right|, \left| \nu_{c_{ij}^{t+1}} - \nu_{c_{ij}^t} \right| \right\rangle,$$

где $\nu_{c_{ij}^{t+1}}, \nu_{c_{ij}^t}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$, $t \in J_{r_{ij}}$ – погрешности задания высот $\mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}$.

Определение 7. Интервальной высотой $\left\langle H_{ij} \right\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_k, j \in J_m$ занятой части интервальной области $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ назовем максимальное интервальное расстояние между интервальной координатной плоскостью $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$ и интервальными гиперплоскостями, участвующими в формировании интервальной границы $\mathbf{fr}\,\mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$, где $\mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$ – интервальный параллелепипед, помещенный в $\mathbf{P}_{ij}$ последним.

Очевидно, величина $\langle H_{ij}\rangle$ равна сумме интервальных высот интервальных параллелепипедов, помещенных в $\mathbf{P}_{ij}$ с учетом интервального расстояния между ними при условии, что данные интервальные параллелепипеды интервально касаются [6]:

$$\langle H_{ij}\rangle = \sum_{t=1}^{r_{ij}} (\langle H_{ij}^{t}\rangle + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}_{ij}^{t-1}, \mathbf{P}_{ij}^{t})) ; \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} = n , \tag{13}$$

где $\langle H_{ij}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $t \in J_{r_{ij}}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$ – интервальная высота интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_{ij}^{t}$, помещенного в подобласть $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{P}_0$ на t-е место.

Тогда интервальной высотой $\langle H\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ занятой части интервальной области размещения $\mathbf{P}_0$ является интервальная величина

$$\langle H\rangle = \max_{1\le i\le k} (\max_{1\le j\le m} \langle H_{ij}\rangle) , \tag{14}$$

т.е. под интервальной высотой $\langle H\rangle$ занятой части интервальной области $\mathbf{P}_0$ будем понимать максимальный элемент $\langle H^{*}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ точечного множества

$$\{ \langle H_{11}\rangle, \langle H_{12}\rangle, ..., \langle H_{1m}\rangle, \langle H_{21}\rangle, ..., \langle H_{2m}\rangle, ..., \langle H_{k1}\rangle, ..., \langle H_{km}\rangle\} \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R} ,$$

где $\langle H_{ij}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$.

Иначе

$$\langle H^{*}\rangle = \max \{ \langle H_{11}\rangle, \langle H_{12}\rangle, ..., \langle H_{1m}\rangle, \langle H_{21}\rangle, ..., \langle H_{2m}\rangle, ..., \langle H_{k1}\rangle, ..., \langle H_{km}\rangle\}, \ k \in N .$$

Рассмотрим интервальное мультимножество $\mathbf{G} = \{\langle C_1\rangle, \langle C_2\rangle, ..., \langle C_n\rangle\} \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$. Предположим, что g из n элементов данного множества различны согласно определения равенства двух элементов пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [4, 5].

Каждому размещению интервальных параллелепипедов поставим в соответствие интервальную матрицу [11] вида:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{A}_{k2} & \cdots & \mathbf{A}_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \end{pmatrix},$$

где под элементом $\mathbf{A}_{ij} \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$ интервальной матрицы $\mathbf{A}$ будем понимать интервальное множество вида

$$\mathbf{A}_{ij} = \{\langle H_{ij}^{1}\rangle, \langle H_{ij}^{2}\rangle, ..., \langle H_{ij}^{t}\rangle, ..., \langle H_{ij}^{r_{ij}}\rangle\} \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R} .$$

Интервальной матрице $\mathbf{A}$ сопоставим интервальную перестановку [9]:

$$\boldsymbol{\pi} = (\langle \pi_1\rangle, \langle \pi_2\rangle, ..., \langle \pi_n\rangle) ; \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\langle H_{11}^1\rangle,\langle H_{11}^2\rangle,\ldots,\langle H_{11}^{r_{11}}\rangle,\langle H_{12}^1\rangle,\langle H_{12}^2\rangle,\ldots,\langle H_{12}^{r_{12}}\rangle,\ldots,\langle H_{km}^1\rangle,\ldots,\langle H_{km}^{r_{km}}\rangle);$$

$$\langle H_{ij}^t\rangle \in \mathbf{G},\ i\in J_k,\ j\in J_m,\ t\in\{r_{11}, r_{12},\ldots,r_{km}\}.$$

Комбинаторные е-множества [1], порождаемые множеством интервалов $\mathbf{G}$, называются [9] интервальными **е**-множествами или **ie**-множествами.

Осуществим погружение **ie**-множества всех интервальных перестановок вида (15) $\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ в n-мерное интервальное пространство $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$.

Всякому элементу $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G})$ поставим в соответствие элемент

$$U = \mathbf{X} = (\langle X_1\rangle,\langle X_2\rangle,\ldots,\langle X_n\rangle) = (\langle X_{11}^1\rangle,\ldots,\langle X_{11}^{r_{11}}\rangle,\ldots,\langle X_{km}^1\rangle,\ldots,\langle X_{km}^{r_{km}}\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$$

по следующему закону:

$$\boldsymbol{\theta}:\boldsymbol{\pi}\to\mathbf{X}; \tag{16}$$

$$\langle \pi_j\rangle = \langle X_j\rangle;\ \forall\boldsymbol{\pi} = (\langle\pi_1\rangle,\langle\pi_2\rangle,\ldots,\langle\pi_n\rangle);$$

$$\langle X_j\rangle = \langle G_{\alpha_i}\rangle,\ j\in J_n;\ \langle G_{\alpha_i}\rangle\in\mathbf{G},\ \alpha_i\in J_n,\ i\in J_n.$$

Обозначим через $\mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G})) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ образ интервального **е**-множества $\mathbf{IM} = \mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ при отображении (16).

Тогда математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения интервальных параллелепипедов в интервальной области может быть представлена в виде:

найти

$$\langle H^*\rangle = \langle h^*, \nu_h^*\rangle = \min_{U\in\mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G})}\langle H\rangle;\quad \langle H\rangle = \max_{1\le i\le m}\ (\max_{1\le j\le k}\langle H_{ij}\rangle); \tag{17}$$

$$\langle H_{ij}\rangle = \sum_{t=1}^{r_{ij}}\langle X_{ij}^t\rangle + \sum_{t=1}^{r_{ij}-1}\left\langle \left|\nu_{X_{ij}^t} + \nu_{X_{ij}^{t+1}}\right|, \left|\nu_{X_{ij}^t} - \nu_{X_{ij}^{t+1}}\right|\right\rangle,\ i\in J_k,\ j\in J_m.$$

Задача (17) является основной интервальной задачей оптимизации на **ie**-множестве [10] или основной **ie**-задачей, которая может быть представлена в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})\to\min;\ \mathbf{X}\in\mathbf{ID}\subseteq\mathbf{IE}\subset\mathbf{I}_s^n\,\mathbf{R},$$

где $\mathbf{IE} = \theta(\mathbf{IM})$; $(\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle,\ldots,\langle M_n\rangle)\in\mathbf{IM}$;

$$\theta(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{X} = (\langle X_1\rangle,\langle X_2\rangle,\ldots,\langle X_n\rangle)\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R};\ \ \langle X_i\rangle = \langle M_i\rangle,\ i\in J_n.$$

Выводы по данному исследованию. Построенная интервальная математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения параллелепипедов в параллелепипеде с учетом погрешностей исходных данных позволяет, с одной стороны, рационально учесть погрешности исходных данных уже на этапе моделирования задачи, с другой, в дальнейшем, при ее реализации использовать известные методы комбинаторной оптимизации. Модель может быть использована при моделировании 3D задач размещения геометрических объектов с кусочно-линейной границей, при моделировании задач компоновки радиоэлектронной аппаратуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.*
2. *Стоян Ю.Г., Галата А.Я. О плотной упаковке параллелепипедов произвольных размеров в параллелепипеде наименьшего объема // Кибернетика. – 1972. – № 2. – С.81-86.*
3. *Новожилова М.В., Черноморец А.А. Об одном способе поиска оптимального размещения гиперпараллелепипедов // Препр. НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения. – 1992. – № 365 – С. 27.*
4. *Стоян Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Доклады НАН Украины, А. – 1996. – № 7. – С. 23-25.*
5. *Stoyan Yu. G. The extended interval space and elementary mappings // Proc. of the IMACS – GAMM Intern. Symp. On Numerical Methods and Error Bounds. – Oldenburg (Germany). – 1995. – P. 270-279.*
6. *Романова Т.Е. Интервальное пространство* $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ *// Доклады НАН Украины. – 2000. – № 9.– С. 36-41.*
7. *Стоян Ю.Г. Квазилинейные интервальные отображения. Интервальная метрика. Препр. НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения. – Х., 1995. – № 387. – 23 с.*
8. *Гребенник И.В., Романова Т.Е. Интервальная гиперплоскость в пространстве* $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ *// Проблемы машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 52-56.*
9. *Гребенник И.В., Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. Основная оптимизационная задача геометрического проектирования в интервальном виде // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2004. – № 2. – С. 68-72.*
10. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1998. – № 9 – С. 114-120.*
11. *Евсеева Л.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю.А. Особенности комбинаторной оптимизационной задачи размещения интервальных прямоугольников // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 3. – С. 48-50.*

Поступила 6.01.2006

Рецензент: доктор технических наук, старший научный сотрудник Н.И. Гиль, Институт проблем машиностроения НАН Украины.