

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

УДК 621.396.96

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО СИНТЕЗАТОРА СИГНАЛОВ

Н.П. Кандырин<sup>1</sup>, А.М. Дзигора<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>Объединенный научно-исследовательский институт ВС Украины, Харьков,  
<sup>2</sup>Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба)

*Приведена математическая модель цифрового синтезатора сигналов (ЦСС) вычислительного типа, позволяющая моделировать процессы формирования как простых, так и сложных ЧМ сигналов с любой приемлемой степенью точности.*

*математическая модель, цифровой синтезатор сигналов*

**Постановка проблемы.** Применение новых микроэлектронных технологий и методов комплексной цифровой обработки набора высокостабильных сигналов со сложными законами модуляции амплитудно-частотно-временных параметров существенно повышает эффективность современных и перспективных радиотехнических средств. Требования к точности и стабильности параметров формируемых сигналов постоянно повышаются, и традиционные аналоговые методы формирования сложных сигналов в ряде случаев уже не удовлетворяют этим требованиям. Это обстоятельство, а также интенсивное развитие быстродействующих микросхем запоминающих устройств, цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП), цифровых процессоров для обработки сигналов, программируемой логики (ПЛИС) предопределило интерес к полностью реализуемым на интегральных микросхемах (за исключением выходного фильтра) цифровым устройствам формирования, называемым цифровыми синтезаторами сигналов (ЦСС) [1 – 3]. Наиболее перспективными для формирования радиолокационных сигналов с изменяемыми в широких пределах параметрами являются ЦСС вычислительного типа [3, 4], принцип работы которых основан на формировании в фиксированные дискретные моменты времени амплитудных вы-

борок синтезируемых ЧМ сигналов. Такие ЦСС содержат: устройство управления и синхронизации (УУС), вычислитель кодов фазы (ВКФ), преобразователь кодов (ПК), ЦАП и полосовой фильтр (ПФ) (рис. 1).

Цифровые синтезаторы позволяют не только изменять параметры формируемых сигналов, но и вводить в сигнал требуемые предискажения, обеспечивают когерентность, высокую стабильность и повторяемость параметров сигналов, а также хорошую воспроизводимость характеристик при серийном изготовлении. Однако, ошибки дискретизации и квантования, характерные для устройств цифрового синтеза, приводят к ухудшению качества их выходного сигнала. Основными причинами искажений формируемых в ЦСС сигналов являются: ошибки вычислений, связанные с ограниченной разрядностью ВКФ; ограниченная разрядность ПК, погрешности преобразования кодов фазы в коды амплитуды; ошибки цифроаналогового преобразования, вызванные нелинейностью характеристик, ограниченным быстродействием и разрядностью ЦАП; нелинейность АЧХ и ФЧХ восстанавливающего ПФ; ошибки, обусловленные дискретностью ввода исходных данных и нестабильностью тактовой частоты [3].

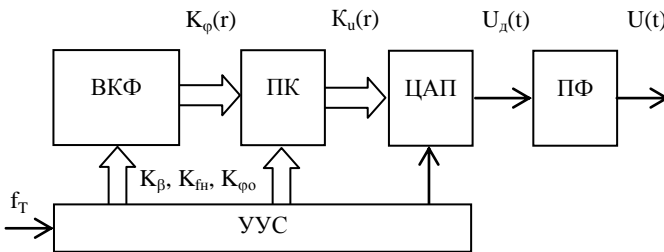


Рис. 1. Структурная схема ЦСС вычислительного типа

Таким образом, анализ характера и уровня искажений сигналов при различных способах аппаратурной реализации, а также выбор параметров ЦСС, обеспечивающих минимальный уровень спектральных составляющих искажений формируемых ЧМ сигналов, является актуальной научно-технической задачей.

Экспериментальные исследования таких устройств требуют значительных аппаратурных затрат и наличия комплекса сложной измерительной аппаратуры. Поэтому на этапе разработки наиболее экономичным и эффективным методом исследования цифровых синтезаторов ЧМ сигналов, является математическое моделирование их с использованием ЭВМ.

**Анализ литературы.** Вопросам математического моделирования радиотехнических систем посвящено немало опубликованных на сегодняшний день работ. Однако большинство работ этой тематики носит частный

характер. В некоторых из них даются конкретные рекомендации, но все они имеют узкое применение и не могут быть обобщены и использованы для всего многообразия технических устройств. Как показывает практика, выбор адекватной математической модели, позволяющей достаточно быстро и эффективно решить поставленную инженерную задачу на ЭВМ, обычно представляет наибольшие трудности, и все еще недостаточно освещен как в отечественной, так и в зарубежной литературе. Что касается ЦСС, то в ряде публикаций [4, 5] были рассмотрены математические модели лишь его отдельных независимых функциональных узлов (ВКФ, ПК). Однако на этапе проектирования ЦСС необходимо получить его обобщенную математическую модель, которая бы отражала специфику работы реального устройства и достаточно полно учитывала основные источники искажений и характер их влияния на частотно-временные параметры формируемых сигналов.

**Целью статьи** является разработка обобщенной математической модели ЦСС вычислительного типа – унифицированного формирователя простых и сложных зондирующих и гетеродинных сигналов. Это позволит на этапе проектирования определить оптимальную структуру ЦСС, наиболее полно удовлетворяющего требованиям к стабильности частотно-временных параметров формируемых сигналов.

**Основной раздел.** Прежде чем перейти к описанию обобщенной математической модели всего ЦСС, необходимо провести поблочное математическое моделирование схемы, приведенной на рис. 1. Результатом моделирования синтезатора на ЭВМ будет оценка выходных параметров формируемого сигнала, а также определение по ним емкости ВКФ ( $N$ ), типа ПК, типа и порядка ПФ. В таком случае схема моделирования ЦСС на ЭВМ примет вид, приведенный на рис. 2.

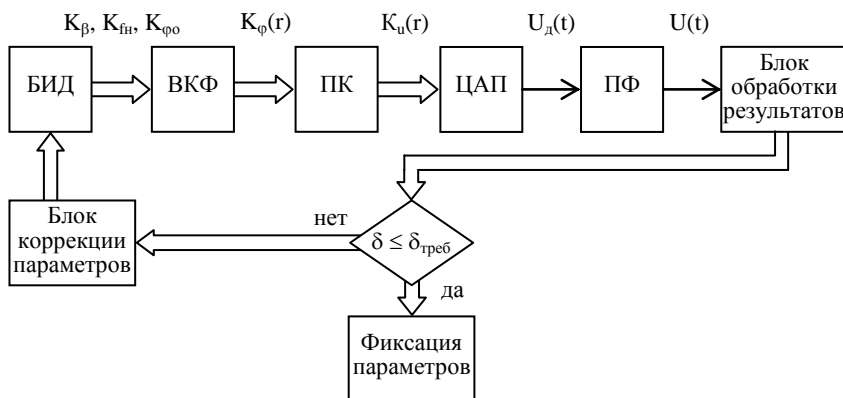


Рис. 2. Формальная схема моделирования ЦСС на ЭВМ

Здесь задача решается методом статистического моделирования, т.е. путем многократных прогонов модели при заданных начальных условиях параметров системы  $K_\beta$ ,  $K_{\text{fn}}$ ,  $K_{\text{фо}}$  и  $N$ .

В блоке исходных данных (БИД) формируется ряд независимых входных начальных кодов ( $K_\beta$ ,  $K_{\text{fn}}$ ,  $K_{\text{фо}}$ ) синтезируемого ЧМ сигнала. Эти коды поступают в блок ВКФ, являющийся реализованной на ЭВМ его математической моделью [4]

$$K_\varphi(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[ \frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r-i) \right] - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left( K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[ \frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r-i) \right] \right) \right\}, \quad (1)$$

где  $K_s^*(0)$  – начальные коды, предварительно записываемые в регистры накапливающих сумматоров (НС) ВКФ из БИД. На выходе блока ВКФ формируется последовательность кодов фазы синтезируемого сигнала  $K_\varphi(r)$ .

В блоке преобразователей кодов фазы (ПК) осуществляется преобразование кодов фазы в коды амплитуды. При этом ПК можно представить математической моделью [5]

$$K_u(r) = N - N \cdot 2^{\text{ent}\left\{\frac{2}{N}K_\varphi(r)\right\}-1} + \{K_\varphi(r)\}_{\text{mod}(N/2)} \cdot (-1)^{\text{ent}\left\{\frac{2}{N}K_\varphi(r)\right\}+1} + \text{ent} \left\{ \frac{N}{16} \text{ent} \left\{ \frac{8}{N} \{K_\varphi(r)\}_{\text{mod}\frac{N}{4}} \right\} + \frac{1}{2} \{K_\varphi(r)\}_{\text{mod}\frac{N}{8}} \cdot (-1)^{\text{ent}\left\{\frac{8}{N}\{K_\varphi(r)\}_{\text{mod}\frac{N}{4}}\right\}} \right\} \times \left( -1 \right)^{\text{ent}\left\{\frac{2}{N}\left[ N - N \cdot 2^{\text{ent}\left\{\frac{2}{N}K_\varphi(r)\right\}-1} + \{K_\varphi(r)\}_{\text{mod}(N/2)} \cdot (-1)^{\text{ent}\left\{\frac{2}{N}K_\varphi(r)\right\}+1} \right] + 0,5 \right\}}, \quad (2)$$

где  $N = 2^n$  – емкость ВКФ разрядности  $n$ ;  $K_\varphi(r)$  – код фазы на выходе ВКФ [4];  $\text{ent}\{x\}$  – операция выделения целой части числа  $x$ ;

$$\{x\}_{\text{mod}y} = x - y \cdot \text{ent}\left\{\frac{x}{y}\right\}.$$

Коды амплитуды  $K_u(r)$  однозначно связаны с амплитудными отсчетами  $U(rT)$  формируемого сигнала выражением

$$U(rT) = \frac{2}{2^m - 1} \cdot \text{ent}\left\{\frac{K_u(r)}{2^{n-m-1}}\right\} - 1, \quad (3)$$

где  $m$  – разрядность ЦАП.

Цифровой ЧМ сигнал и его спектр можно представить в виде [6]:

$$U_{ц}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} U(rT)\delta(t-rT); \quad (4)$$

$$\dot{S}_{ц}(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \dot{S}_r(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} U(rT)e^{-j\omega rT}. \quad (5)$$

Блок цифроаналогового преобразователя (ЦАП) служит для преобразования последовательности цифровых отсчетов амплитуды в дискретное аналоговое колебание  $U_{д}(t)$ . При этом процесс интерполяции цифрового ЧМ сигнала  $U_{ц}(t)$  можно представить в виде его свертки с интерполирующей функцией  $g_v(t)$  ЦАП

$$U_{д}(t) = U_{ц}(t) \otimes g_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{ц}(\tau)g_v(t-\tau)d\tau. \quad (6)$$

В соответствии со свойством преобразования Фурье [6], спектр сигнала на выходе ЦАП описывается выражением

$$\dot{S}_{д}(\omega) = \dot{K}_v(\omega)\dot{S}_{ц}(\omega), \quad (7)$$

где

$$\dot{K}_v(\omega) = \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^{v+1} e^{-j\omega T/2} \quad (8)$$

представляет собой передаточную функцию интерполатора;  $v = 0, 1, 2, \dots$  – порядок интерполяции, определяющий вид функции  $g_v(t)$ .

Наиболее распространенная интерполирующая функция ЦАП имеет форму прямоугольного импульса длительностью  $T$

$$g_0(t) = \begin{cases} 1/T, & \text{при } 0 \leq t < T; \\ 0, & \text{при } t < 0; t \geq T. \end{cases} \quad (9)$$

Такие ЦАП называют интерполаторами нулевого порядка ( $v = 0$ ). В этом случае сигнал вида (6) представляет собой ступенчатую аппроксимацию формируемого ЧМ колебания. Передаточная функция интерполатора нулевого порядка определяется выражением [6]

$$\dot{K}_0(\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \cdot e^{-j\omega T/2}. \quad (10)$$

С учетом (10), спектр дискретного сигнала на выходе ЦАП можно представить как

$$\dot{S}_{д}(\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \cdot e^{-j\omega T/2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} U(rT)e^{-j\omega rT}; \quad (11)$$

Таким образом, сигнал на выходе ЦАП  $U_{д}(t)$  является дискретным, его спектр имеет периодическую структуру и помимо основной прямой составляющей (ОПС) содержит большое число нежелательных боковых составляющих [6]. Кроме того, неравномерность АЧХ и ФЧХ ЦАП приводит к искажениям спектра синтезируемого сигнала.

Требуемый уровень внеполосных паразитных составляющих формируемого ЧМ сигнала обеспечивается подавлением последних в блоке восстанавливающих фильтров (ФНЧ или ПФ). В настоящее время разработаны и широко используются на практике фильтры Баттерворта (с максимально плоской амплитудной характеристикой), Бесселя (с максимально плоской фазовой характеристикой), Чебышева и Кауэра (эллиптические фильтры). В общем случае передаточные функции указанных фильтров можно представить в виде [7]

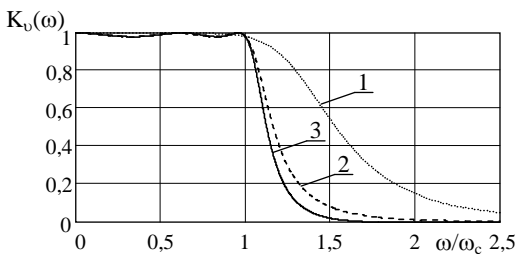


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики ФНЧ 5-го порядка

$$K_v(P) = C \prod_{\xi=1}^{N_0} (P - P_{0\xi}) / \prod_{\xi=1}^{N_\infty} (P - P_{\infty\xi}), \quad (12)$$

где  $P = j\omega$  — комплексный аргумент;  $\nu$  — порядок фильтра;  $N_\infty = \nu$  — для ФНЧ и  $N_\infty = 2\nu$  — для полосовых фильтров;  $P_{0\xi} = \alpha_{0\xi} + j\beta_{0\xi}$ ,  $P_{\infty\xi} = \alpha_{\infty\xi} + j\beta_{\infty\xi}$  — нули и полюсы передаточной функции фильтра;  $C$  — константа.

На рис. 3. приведены графические изображения АЧХ ФНЧ Баттерворта (1), Чебышева (2) и Кауэра (3) 5-го порядка, рассчитанных согласно [7].

Наличие неравномерности АЧХ и ФЧХ восстанавливающего фильтра приводит, в конечном счете, к искажению, как основной составляющей спектра, так и выходного сигнала ЦСС в целом.

Таблица 1

Расчетные значения коэффициента гармоник для Фильтров Баттерворта и Гаусса  $\nu$ -порядка

Тип фильтра	Порядок фильтра							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho_r$ , дБ (Баттерворта)	28,6	38,1	47,7	57,2	66,7	76,3	85,8	—
$\rho_r$ , дБ (Гаусса)	25,2	30,3	34,8	37,7	40,1	41,8	42,7	43,4

Среди внеполосных составляющих наибольшей амплитудой будут обладать составляющие гармоник, соответствующие ближайшим боковым составляющим спектра

дискретного ЧМ сигнала. Для количественной оценки уровня внеполосных составляющих используется коэффициент гармоник, определяемый выражением

$$\rho_r = 20 \lg \left\{ 3 \left| \dot{S} \left( \frac{\omega_r}{4} \right) \right| / \left| \dot{S} \left( \frac{3\omega_r}{4} \right) \right| \right\}. \quad (13)$$

В [8] в соответствии с (13) произведен расчет коэффициента гармоник  $\rho_r$  для различных типов сглаживающих фильтров и интерполятора

нулевого порядка. Анализ результатов расчетов, приведенных в табл. 1, показывает, что требуемый уровень внеполосных составляющих обеспечивается выбором соответствующего порядка фильтра, который при  $\rho_r \leq (40...50)$  дБ довольно высокий ( $\nu = 4...6$ ).

Сигнал на выходе ЦСС (выходе ПФ) определяется сверткой

$$U(t) = U_d(t) \otimes g_v(t) = U_{ц}(t) \otimes g_v(t) \otimes g_v(t), \quad (14)$$

а его спектр – произведением

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_d(\omega) \dot{K}_v(\omega) = \dot{S}_{ц}(\omega) \dot{K}_v(\omega) \dot{K}_v(\omega) = \dot{K}_v(\omega) \dot{K}_v(\omega) \sum_{r=-\infty}^{\infty} U(rT) e^{-j\omega rT}. \quad (15)$$

На рис. 4 показаны частотные диаграммы, поясняющие принцип работы ЦСС при формировании сигнала с нелинейной частотной модуляцией, рассмотренного в [9].

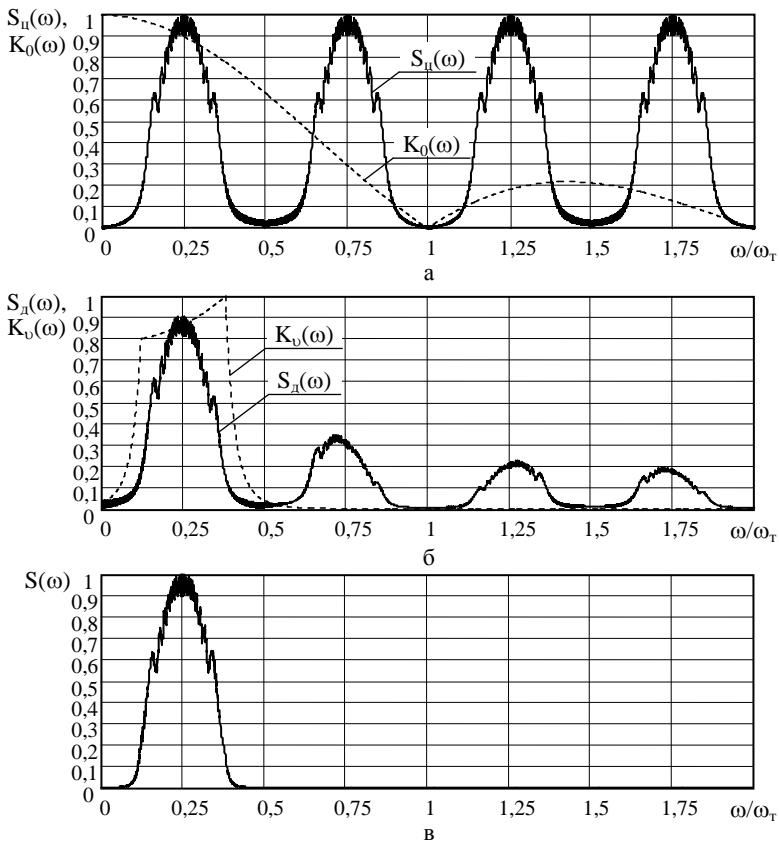


Рис. 4. Частотные диаграммы работы ЦСС:

а – спектр цифрового НЧМ сигнала на входе ЦАП  $S_d(\omega)$  и передаточная функция ЦАП  $K_0(\omega)$ ; б – спектр дискретного НЧМ сигнала на выходе ЦАП

$S_0(\omega)$  и передаточная функция ПФ  $K_0(\omega)$ ;  $v$  – спектр НЧМ сигнала на выходе ЦСС с учетом коррекции нелинейности передаточной характеристики ЦАП

Таким образом, имея математические модели всех составных элементов схемы приведенной на рис. 2, мы можем перейти к непосредственному анализу обобщенной математической модели ЦСС, определенной выражением (15).

Алгоритм работы такой обобщенной математической модели ЦСС на ЭВМ представлен на рис. 5.

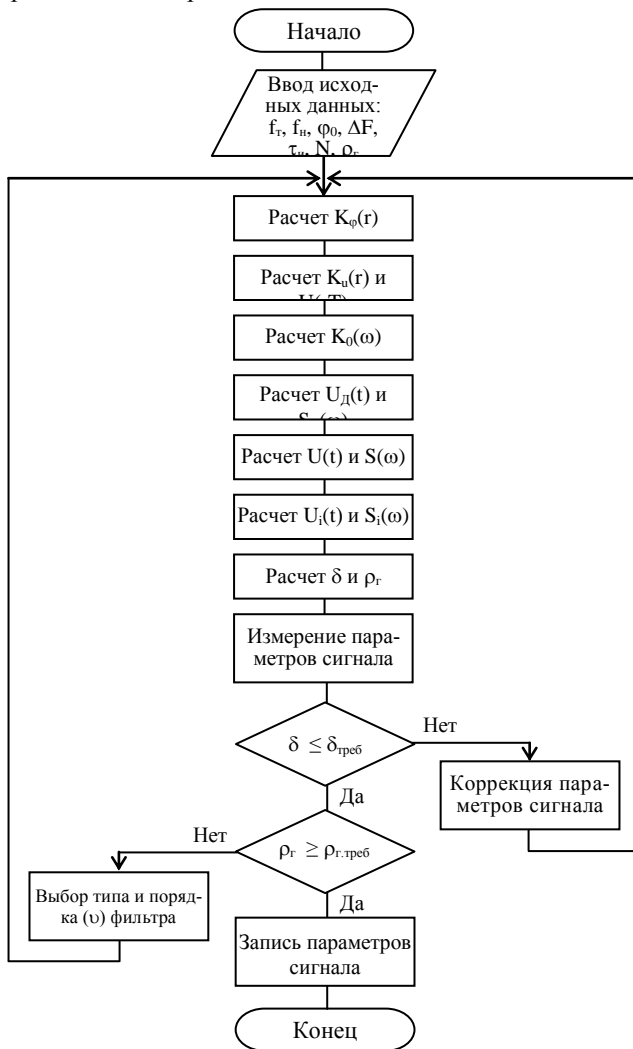


Рис. 5. Схема алгоритма моделирования на ЭВМ работы ЦСС



Алгоритм математической модели ЦСС (рис. 5) позволяет всесторонне проанализировать его работу по соответствующей программе: определить значения кодов начальной частоты  $K_{f_H}$ , фазы  $K_{\varphi_0}$  и скорости частотной модуляции  $K_{\beta}$ , обеспечивающих с необходимой точностью получение выходной частоты и девиации в выбранном диапазоне частот; определить требуемое значение емкости (N) или разрядности (n) ВКФ, обеспечивающих необходимый шаг перестройки по частоте  $\Delta K_{f_H}$  и фазе  $\Delta K_{\varphi_0}$ ; определить необходимый тип ПК (табличный, вычислительный или таблично-вычислительный) по заданному требованию уровня шумов, лежащих в полосе синтезируемых частот; выбрать тип и порядок ПФ для обеспечения требуемого уровня внеполосных составляющих при заданных значениях несущей и девиации частот.

Таким образом, для моделирования ЦСС мы располагаем формальным описанием относительно множества выходных параметров. Выходные параметры, используемые для оценки качества функционирования ЦСС, тесно связаны с конкретными задачами, подлежащими решению методами моделирования на ЭВМ. Такими выходными параметрами у нас являются показатели качества. Показатели качества устанавливаются при формулировке технического задания на проектирование ЦСС и далее их необходимо оценивать методом моделирования рассматриваемого варианта ЦСС.

В основу исследования искажений ЧМ сигналов при их цифровом формировании положим обобщенную функцию потерь. Для ее количественной оценки воспользуемся нормированным среднеквадратическим критерием

$$\delta^2 = \frac{\int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} |U_i(t) - U(t)|^2 dt}{\int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} |U_i(t)|^2 dt} = \frac{\int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} \frac{|\Delta_t|^2}{E} dt}{\int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} \frac{|\Delta_t|^2}{E} dt} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f) - S(f)|^2 df, \quad (16)$$

где  $U_i(t)$ ,  $U(t)$  – идеальный и формируемый сигнал;  $S_i(f)$ ,  $S(f)$  – соответственно, их спектры;  $E = \int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} |U_i(t)|^2 dt$  – энергия идеального сигнала

$U_i(t)$ ;  $|\bar{\Delta}_t| = \int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} |\Delta_t| dt = \int_{-0,5\tau_H}^{0,5\tau_H} |U_i(t) - U(t)| dt$  – значение отклонения формируемого сигнала  $U(t)$  от идеального.

Оценка внутриполосных составляющих спектра искажений по относительному среднеквадратическому критерию характеризует, по существу, увеличение энергии искажений в формируемом сигнале по отношению к энергии идеального сигнала.

При решении ряда практических задач не всегда ставятся жесткие условия к уровню искажений спектров ЧМ сигналов на выходе ЦСС. Иногда просто требуется обеспечить максимальную полосу или несущую частоту формируемого сигнала. Как раз этим условиям наиболее полно отвечают ЦСС вычислительного или таблично-вычислительного типа. Кроме того, они обладают самой большой гибкостью по управлению частотно-временными параметрами формируемых сигналов.

**Выводы.** Полученная математическая модель позволяет моделировать формирование ЧМ сигналов любой сложности, анализировать ошибки формирования на каждом его этапе от значений начальных условий, определять по величине искажений тип и параметры ВКФ и ПКФ, а также ЦСС в целом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. Методика определения параметров цифровых синтезаторов по величине искажений сжатых ЛЧМ сигналов в РЛС различного назначения // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2002. – Вип. 4 (20). – С. 219-224.
2. Кандирін М.П., Дзигора О.М. Сучасний стан техніки цифрового синтезу складних частотно-модульованих сигналів // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 6 (6). – С. 20-25.
3. Кандырин Н.П., Дзигора А.М., Шалепа О.А. Методика проектирования комбинированных цифро-аналоговых синтезаторов сигналов // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 2 (42). – С. 41-47.
4. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. Математическая модель цифрового вычислителя кодов фазы простых и сложных ЧМ сигналов // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2006. – Вип. 2 (51). – С. 37-42.
5. Кандирін М.П., Дзигора О.М. Математична модель перетворювача кодів фази в коди амплітуди при цифровому синтезі простих і складних ЧМ сигналів // Системи озброєння і військова техніка. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил, 2006. – Вип. 1(5). – С. 101-104.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. 4-е изд. переработ. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
7. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров. Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1983. – 752 с.
8. Фадеев А.Н. Исследование и разработка цифровых синтезаторов сигналов. – Автореферат дисс. канд. техн. наук. – М.: ВЗЭИС. – 1983. – 18 с.
9. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. Выбор структуры частотно-модулированных сигналов для обзорных РЛС // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2002. – Вип. 5(21). – С. 88-92.

Поступила 24.04.2006

**Рецензент:** доктор технических наук, профессор В.А. Лошаков,  
Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.