МАТЕМАТИЧНІ
МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

УДК.681.324

О РАСПОЗНАВАТЕЛЬНОМ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ВАРИАНТАХ ЗАДАЧИ «ВЫПОЛНИМОСТЬ»

С.В. Листровой[1], Е.С. Листровая[2]
([1]Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба,
[2]Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»)

В работе показано, что вариант распознавания, выполнима ли произвольная булева функция или нет, полиномиально разрешим, а вычислительный вариант задачи, когда нужно указать набор переменных, на котором функция принимает значение «истинно», имеет экспоненциальную сложность.

экспоненциальная сложность, задача «выполнимость»

Введение. Класс задач NP [1 – 3] вводился, как более общий класс распознавания, включающий в себя класс P. В общем случае вариант распознавания комбинаторных задач оптимизации имеет следующий вид.

По входным данным S и целому числу L определить существует такое допустимое решение $f \in F$, что стоимость $C(f) \le L$, где F – множество допустимых решений. Вариант распознавание представляет собой вопрос, на который нужно ответить да или нет, в отличие от вычислительного варианта комбинаторной задачи оптимизации, где требуется найти стоимость оптимального решения. В теории NP-полных задач обе задачи рассматриваются в единой постановке, основанной на предположении, что для решения вычислительной задачи можно эффективно использовать любой алгоритм задачи распознавания. Покажем, что данное предположение не верно на примере задачи «3-выполнимость», для которой можно построить алгоритм устанавливающий «истинность» булевой функции за полиномиальное время, а представление удостоверения подтверждающего решение задачи распознавания осуществить только за экспоненциальное время.

Постановка задачи на исследование. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, .., x_n)$ в конъюнктивной форме записи

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = (x_1^{\sigma_{11}} \vee x_2^{\sigma_{12}} \vee ... \vee x_n^{\sigma_{1n}}) \wedge ... \wedge (x_1^{\sigma_{m1}} \vee x_2^{\sigma_{m2}} \vee ... \vee x_n^{\sigma_{mn}}),$$

где $x_i^{\sigma_{jk}} = \begin{cases} x_i, - \text{при } \sigma = 1; \\ \overline{x_i} - \text{при } \sigma = 0. \end{cases}$

Операции $\vee$, $\wedge$ являются булевыми и моделируют простейшие логические высказывания: $\vee$ – «ИЛИ»; $\wedge$ – «И». Для любого двоичного набора $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ функция принимает одно из двух возможных значений: единицу или нуль. Задача «выполнимость» заключается в ответе на вопрос: существует ли набор значений переменных $x = (x_1, x_2, .., x_n)$, обращающий функцию f(x) в единицу. Из [3] известно, что задача «k-выполнимость», т.е. с k-литералами в каждой скобке логической функции, за полиномиальное время может быть сведена к задаче «3-выполнимость» с тремя литералами в каждой скобке. Как показано в [3], если дизъюнкт C_t содержит k-переменных $C_t = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k)$, $k > 3$, то возможна замена C_t на $(k – 2)$ дизъюнкта

$$(x_1 \vee x_2 \vee u_1)(\overline{u_1} \vee x_3 \vee u_2)(\overline{u_2} \vee x_4 \vee u_3) \ldots (\overline{u_{k-3}} V x_{k-1} V x_k),$$

где u_1, u_2, u_{k-3} – новые переменные причем набор новых дизъюнктов выполним тогда и только тогда, когда выполним дизъюнкт C_t. После сведения задачи «k-выполнимость» к «3-выполнимость» число дизъюнктов возрастет в $(k – 2)$ раза, а число переменных в $(k – 3)$ раза. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать задачу «выполнимость», в которой в каждом дизъюнкте C_t содержится число литералов, не превышающее трех, поскольку те дизъюнкты, в которых число литералов $k > 3$ всегда можно заменить на $k – 2$ дизъюнкта, содержащих по три литерала.

Введем понятие минимальной дизъюнктивной формы $F_л$ произвольной булевой функции f от двух и трех переменных с минимальным числом дизъюнктов r, при которых $F_л$ принимает значение «ложно» на всех возможных наборах переменных. Для этого рассмотрим двудольный граф G_{22} (рис. 1), где одну долю образуют переменные (a, b), а вторую – переменные $(\overline{a}, \overline{b})$. В графе ребрами соединены те вершины, которые не являются инверсными.

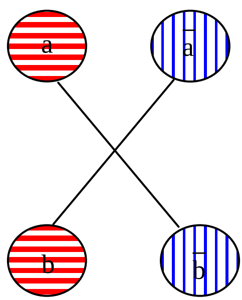

Рис. 1. Граф G_{22}

Для возникновения противоречия в булевой функции необходимо, чтобы присутствовали как переменные (a, b), так и $(\overline{a}, \overline{b})$. Совершенное паросочетание в графе G_{22} дает все возможные дополнения сочетаний переменных, которые можно соединить между собой ребром, поскольку эти вершины в графе не инверсные. Дополнение дизъюнктов, содержащих переменные (a, b) и $(\overline{a}, \overline{b})$ дизъюнктами, содержащими переменные, обусловленные совершенным паросочетанием в графе G_{22}, позволит получить минимальную форму

$$F_{2л} = (a \vee b)(\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee \bar{b})(b \vee \bar{a}). \tag{1}$$

Аналогичным образом построим минимальную форму для функции трех переменных. Снова рассмотрим двудольный граф G_{33} (рис. 2.).

В графе G_{33} существует два совершенных паросочетания (рис. 3).

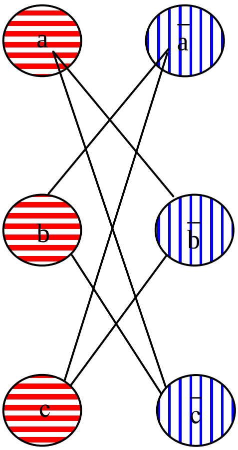

Рис. 2. Граф G_{33}

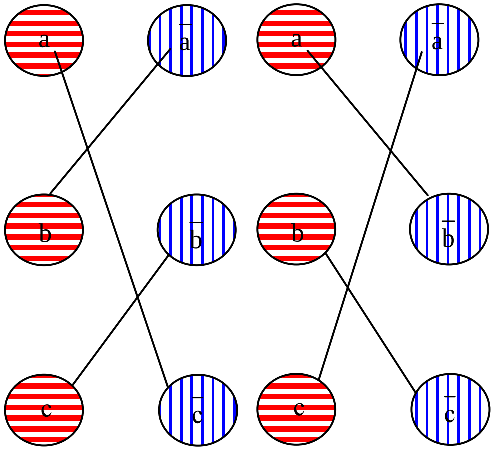

Рис. 3. Совершенные паросочетания графа G_{33}

Поскольку их два, то для булевой функции с тремя переменными можно построить две минимальных формы $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$, где:

$$F_{3лл} = (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{c})(b \vee \bar{a})(c \vee \bar{b}); \tag{2}$$

$$F_{3лл} = (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{b})(b \vee \bar{c})(c \vee \bar{a}). \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать булевы функции только с тремя литералами в дизъюнкциях, поэтому преобразуем $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$ к такому виду.

Для этого добавим в каждую скобку, содержащую две переменных, третью переменную w и умножим функции $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$ на множитель

$$(\bar{w} \vee g \vee u)(\bar{w} \vee g \vee \bar{u})(\bar{w} \vee \bar{g} \vee u)(\bar{w} \vee \bar{g} \vee \bar{u}),$$

с фиктивными переменными.

При этом минимальные формы $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$ примут вид:

$$\begin{aligned} F^{|}_{3лл} = {} & (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{c} \vee w)(b \vee \bar{a} \vee w)(c \vee \bar{b} \vee w) \times \\ & \times (\bar{w} \vee g \vee u)(\bar{w} \vee g \vee \bar{u})(\bar{w} \vee \bar{g} \vee u)(\bar{w} \vee \bar{g} \vee \bar{u}); \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F^{|}_{3лл} = {} & (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee w)(b \vee \bar{c} \vee w)(c \vee \bar{a} \vee w) \times \\ & \times (\bar{w} \vee g \vee u)(\bar{w} \vee g \vee \bar{u})(\bar{w} \vee \bar{g} \vee u)(\bar{w} \vee \bar{g} \vee \bar{u}). \end{aligned} \tag{5}$$

Такое добавление переменных приводит к тому, что переменная w будет принимать значение «ложно» в любом наборе истинности, выполняющем $F^{|}_{3лл}$ и $F^{|}_{3лл}$, поэтому дизъюнкты, содержащие по две переменные, будут эквивалентны заменяемым их дизъюнктам.

Итак, мы избавились от всех дизъюнктов, в которых число литералов отлично от трех и показали, что полученные формулы $F^{|}_{3лл}$ и $F^{|}_{3лл}$ выполнимы тогда и только тогда, когда выполнимы $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$, а поскольку последние невыполнимы ни на одном наборе переменных, то и $F^{|}_{3лл}$ и $F^{|}_{3лл}$ невыполнимы ни на одном наборе переменных образующих данные функции.

Рассмотренные минимальные формы обладают важными свойством, заключающимся в том, что уменьшение числа дизъюнктов хотя бы на один или изменение знака инверсии в произвольном литерале или самого литерала на другой приводит к тому, что измененная функция $F_л$ становится выполнимой, в чем легко можно убедиться, анализируя непосредственно соотношения для $F_{л2}$, $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$. Аналогичным свойством обладают и функции $F^{|}_{3лл}$ и $F^{|}_{3лл}$, поскольку преобразование, примененное к функциям $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$, не изменило их свойств.

Утверждение 1. Если существует булева функция f с числом литералов в каждом дизъюнкте равным трем, то она может получить значение «ложно» на всех наборах переменных, тогда и только тогда, когда на основе какого-либо дизъюнкта этой функции можно построить функции $F^{|}_{3лл}$ и $F^{|}_{3лл}$.

Доказательство. Если мы можем построить одну из функций $F^{|}_{3лл}$ или $F^{|}_{3лл}$, которые на всех наборах переменных принимают значение «ложно» на основе одного из дизъюнктов булевой функции f, то, поскольку f содержит в себе $F^{|}_{3лл}$ или $F^{|}_{3лл}$ в качестве сомножителя, то и она на всех наборах переменных примет значение «ложно» и, следовательно, условие утверждения 1 можно рассматривать как необходимое условие того, что булева функция f может принять значение «ложно» на всех наборах переменных.

Предположим теперь, что нет ни одного дизъюнкта функции f, на основе которых можно было бы построить функции $F^{|}_{3лл}$ или $F^{|}_{3лл}$. И пусть при этом на всех наборах переменных функция f принимает значение «ложно». Последнее возможно, если какая-то часть функции f на всех наборах примет значение «ложно», в свою очередь это возможно только если в качестве сомножителя в ней содержится $F^{|}_{3лл}$ или $F^{|}_{3лл}$, т.е.

мы пришли к противоречию. Следовательно, предположение о том, что при невыполнении условия утверждения 1 булева функция может принять значение «ложно» на всех наборах переменных неверно и поэтому условие утверждения 2 является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы произвольная булева функция принимала значение «ложно» на всех наборах переменных.

Из утверждения 1 вытекает интересное следствие, заключающееся в том, что не существует булевых функций, состоящих из трех литералов в каждой дизъюнкции, принимающих значение «ложно» на всех наборах переменных, если число дизъюнктов в ней меньше девяти. Таким образом, если число дизъюнктов в задаче «3-выполнимость» меньше девяти, то всегда существует набор переменных, на котором булева функция выполнима, независимо от числа различных переменных используемых в дизъюнктах.

Проверка утверждения 1 для одного дизъюнкта требует проведения не более 27 m операций сравнения для одной из функций ($F^{|}_{3лл}$ или $F^{|}_{3лл}$). Проверка его для всех m дизъюнктов и обоих функций займет не более 54 m^2. Следовательно, временная сложность установления факта выполнимости произвольной булевой функции в задаче «3-выполнимость», не превысит в общем случае O (54 m^2).

Заключение. Таким образом, необходимые и достаточные условия возникновения случая, когда булева функция принимает на всех наборах переменных значение «ложно», могут быть определены для произвольной функции за полиномиальное время. Однако, в случае, когда функция выполнима, легко показать, что для установления набора переменных, на котором функция принимает значение «истинно» потребуется экспоненциально большое время. И, следовательно, вычислительный вариант задачи «3-выполнимость», когда нужно указать набор переменных, на котором функция принимает значение «истинно», оказывается существенно более сложным, чем вариант распознавания выполнима ли данная функция или нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cook S.A. TheComplexity of Teorem Proving Procedures, Proc. 3rd ACM SYMP on the Theory of Computing, ACM (1971). – P. 151-158.*
2. *Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 336 с.*
3. *Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.*

Поступила 16.05.2006

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.