УДК 519.6

А.Л. Заворотный, В.С. Касьянюк

РЕДУКЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ К ВЫЧИСЛЕНИЯМ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКОСТИ

В рамках теоретико-возможностного подхода разработан новый метод редукции измерений к выходу из заданного прибора при условии, что погрешности в измерениях удовлетворяют принципу: большая норма ошибки – меньшая ее возможность. Получено множество парето-оптимальных оценок как неизвестного сигнала, так и его выхода из заданного прибора. Представлены результаты использования предложенного метода на примере задачи синтеза линейной излучающей системы.

парето-оптимизация, теория возможностей, нечеткость, редукция, антенна

Рассмотрим типичную схему измерений, описываемую равенством [1]

$$y = Gu + \nu, \qquad (1)$$

где y интерпретируется, как искаженный шумом ν исходящий сигнал прибора G, на вход которого подан сигнал u. Обозначим символом Π гипотетический прибор, исходящий сигнал которого дает значения параметров исследуемого объекта, не искаженного процессом измерений, когда на его вход подан сигнал u, свойственный реальному процессу измерений. Задача состоит в определении такого оператора B, который позволил бы интерпретировать сигнал By как наиболее точную версию Πu.

Для решения сформулированной задачи анализа и интерпретации результатов эксперимента в случае, когда погрешность ν, которая содержится в результирующих данных, промоделирована случайными величинами (т.е. известна определенная статистическая информация про погрешность), можно предложить [1 – 3] целый спектр методов, связанных с той или иной постановкой задач, которые дают возможность нахождения параметров объекта по результатам измерений вида (1). Но в экспериментальных исследованиях часто бывает ситуация, когда получить статистическую информацию или аналитически описать природу погрешностей в терминах теории вероятности – невозможно. В таких случаях можно обратиться к экспертным оценкам, и использовать их в алгоритмах обработки тем или иным способом.

Детализируем представленную выше модель измерений. Пусть в (1) $G: H_1 \to H_2$ – линейный ограниченный оператор, который действует из гильбертова пространства H_1 в конечномерное гильбертово пространство H_2, u – неизвестный элемент пространства H_1, y – известный элемент пространства H_2, ν – нечеткий элемент пространства H_2, $\Pi: H_1 \to H_3$ – оператор Гильберта-Шмидта, действующий из H_1 в гильбертово пространство H_3. Допустим также, что экспертом задано распределение возможностей нечеткого элемента ν – $\varphi^{\nu}(\cdot): H_2 \to L$, реализующее принцип, естественный для многих процессов измерений: больший шум имеет меньшую возможность. Тут L – шкала на сегменте $[0;1]$ с естественным порядком, задаваемым неравенством $\le$ и двумя правилами композиции: сложением, интерпретируемым как $\max$, и умножением, интерпретируемым как $\min$ [4]. В работе [5] предложено искать оптимальный оператор Гильберта-Шмидта $B: H_2 \to H_3$ как решение задачи:

$$\begin{cases} \|BG - \Pi\| \to \min\limits_{B}; \\ \theta \sup\limits_{z} \sup\limits_{u} \min\left(\varphi^{y}(z,u), \theta\, l(\Pi u, d(z))\right) \to \max\limits_{B}, \end{cases} \qquad (2)$$

т.е. задачи одновременной минимизации нормы операторной невязки и максимизации необходимости корректности оценивания нечеткой величины или же интеграла по необходимости от $l(\Pi u, d(z))$, который записан в терминах теории возможностей. В (2) $d(z)$ – стратегия оценивания; $l(\Pi u, d(z))$ – возможность отсутствия ошибки, которая возникает при выборе $d(z)$ в качестве значения Πu для каждого значения $u \in H_1$ (нечеткое отношение корректности); θ – инволюция, определенная в [4] – дуальный изоморфизм, такой что $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$ и для любых $a, b \in [0;1]$ отношения $a \le b$, $\theta(a) \ge \theta(b)$ и $\theta(a) \,\tilde{\le}\, \theta(b)$ эквивалентны ($\tilde{\le}$ – отношение порядка, обратное к естественному); $\varphi^{y}(z,u)$ – совместное распределение нечетких величин y и u, которое, как легко видеть, равно $\varphi^{\nu}(z - Gu)$, так как u по условию является произвольным неизвестным элементом пространства H_1 (таким образом, его распределение $\varphi^{\mu}(u) = 1$). В качестве нечеткого отношения корректности $l(\Pi u, Bz)$ предложено принять распределение $\varphi^{B\nu}(B(z - Gu))$ нечеткой величины $B\nu$, которое можно выразить через $\varphi^{\nu}(\cdot)$, как

$$\varphi^{B\nu}(B(z - Gu)) = \max_{w} \left\{ \varphi^{\nu}(w) \middle| Bw = B(z - Gu) \right\}.$$

В нашем случае стратегия $d(z)$ – это $Bz = \hat{\Pi u}$.

Решение задачи (2) методами, предложенными в [5], приводит к оценке $\hat{\Pi u} = \Pi G^{-} z$, где G^{-} – оператор псевдообратный к G. Кстати, такая оценка максимально минимизирует норму операторной невязки. Очевидно, что от эксперта не обязательно требовать задания распределения нечеткой величины, которая моделирует погрешность. Достаточно получить принципиальный ответ, будет ли уменьшаться возможность такой величины с ростом ее нормы.

Рассмотрим, как применяется предложенный метод на примере задачи синтеза линейной излучающей системы в условиях нечеткости.

Под линейной излучающей системой [6] понимаем линейную антенну длины $2a$, по которой протекает ток $I(x)$, который возбуждает электромагнитное поле. Это поле характеризуется диаграммой направленности в дальней зоне $f(t) = \int_{-a}^{a} e^{itx} I(x) dx$, $t \in (-c, c)$. Задача синтеза линейной антенны по конечному множеству значений ее диаграммы направленности в дальней зоне состоит в нахождении такого тока $I(x)$ в антенне, который порождает диаграмму направленности, принимающую в заданных точках t_k, $k = \overline{1,m}$ заданные значения $f(t_k)$. Т.е., тут функция $I(x)$ – неизвестный сигнал от объекта – u; оператор G, задающий модель измерений, имеет вид $\int_{-a}^{a} e^{it_k x} \cdot dx$, $k = \overline{1,m}$ (в данном случае – функционал); $y_k = f(t_k) + \nu_k$, $k = \overline{1,m}$.

Результаты применения разработанного метода к этой задаче представлены на рис. 1 – 2. Эти рисунки иллюстрируют результаты оценивания на разных сигналах. Оператор Π в данном случае является функционалом

$$\Pi \cdot = \int_{-a}^{a} \pi_\xi(x) \cdot dx, \quad a = \pi,$$

где $\pi_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, |\xi - x| \le \varepsilon \\ 0, |\xi - x| > \varepsilon \end{cases}$, т.е. строились оценки усредненных в двусторонней ε-окрестности значений функции u (ε было выбрано равным 0,01). Результаты измерений y_k были получены при помощи модели измерений $\int_{-a}^{a} \cos((k-4)x) \cdot dx$, $k = \overline{1,7}$, т.е. демонстрировалась действительная часть оценки значения функционала G.

На рис. 1 приведены результаты эксперимента при $u(x) = |x|$, а на рис. 2 – при $u(x) = e^{-x^2}$.

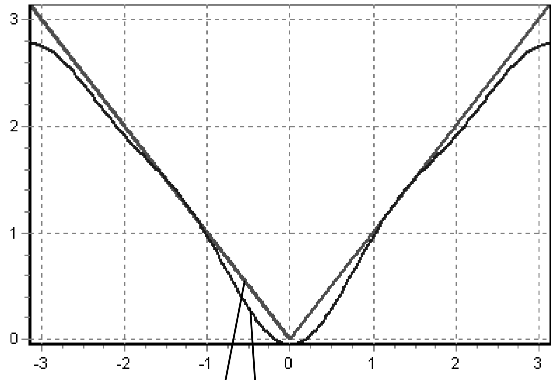

Рис. 1. Результаты эксперимента при $u(x) = |x|$

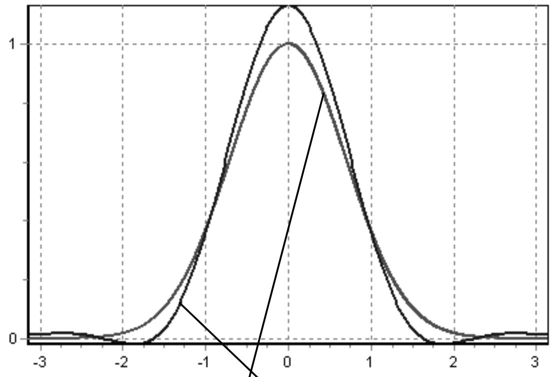

Рис. 2. Результаты эксперимента при $u(x) = e^{-x^2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высш. шк., 1989. – 315 с.
2. *Бєлов О.Ю., Касьянюк В.С.* Про деякі нові методи обробки результатів вимірювань рівней випромінювання РАВ на основі багатокритеріальної оптимізації. – К.: Наук. світ, 2000. – 36 с.
3. *Заворотний А.Л.* Розв`язування задач моделювання ВОС надвисокої роздільної здатності на основі багатокритеріальної оптимізації // Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки. – К., 2004. – № 3. – С. 198-205.
4. *Пытьев Ю.П.* Возможность. Элементы теории и применения. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 192 с.
5. *Заворотний А.Л.* Теоретико-можливісний підхід до задачі редукції спотвореного значення лінійного оператора до значення іншого лінійного оператора // Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки. – К., 2005. – № 3. – С. 268-274.
6. *Минкович Б.М., Яковлев В.П.* Теория синтеза антенн. – М.: Сов. радио, 1969. – 294 с.

Поступила 16.03.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.