

И.П. Захаров, М.П. Сергиенко, О.Н. Величко, В.Н. Чепела

## МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ РАБОТ

*Приводятся основные положения методики по оцениванию неопределенности при выполнении метрологических работ, которые легли в основу “Методических рекомендаций по оцениванию заявленной неопределенности эталонов единиц электрических и магнитных величин” (МР 001/03-01-06), разработанных для Укрметртестстандарта, и методического документа “Рекомендации по оцениванию неопределенности при проведении метрологических работ” (ПМ ХА 33.1405–2005), внедренного в ГП «Харьковстандартметрология».*

**стандартная неопределенность, расширенная неопределенность, модельное уравнение, входные величины, коэффициент охвата**

**Анализ литературы и постановка проблемы.** Повышение точности измерений является одной из важнейших проблем современной метрологии. Один из путей решения этой проблемы – усовершенствование методов обработки и оценивания точности результатов измерений. Курс Украины на европейскую и международную интеграцию обуславливает переход к единым стандартам в области планирования, проведения и обработки измерений [1, 2]. Основой этих стандартов является Рекомендация INC-1 «Выражение экспериментальных неопределенностей» [3], определившая классификацию неопределенностей по типу *A* и *B* в зависимости от способа их оценки, выражение этих неопределенностей в виде дисперсий (стандартных отклонений) и ковариаций, способ их суммирования путем сложения дисперсий и ковариаций и интервальную оценку как произведение суммарной неопределенности на коэффициент охвата. Развитием положений [3] явилось «Руководство по выражению неопределенности измерений» [4]. В документах [3, 4] в качестве основной формы выражения неопределенности нормируется суммарная стандартная неопределенность, а интервальная оценка (расширенная неопределенность) рассматривается как дополнительная, применение которой предполагается «в особых случаях». В более поздних документах [1, 2], получивших широкое международное распространение, расширенная неопределенность с уровнем доверия 0,95 рассматривается как единственная форма выражения неопределенности. В приложении G к Руководству [4] приводится один из вариантов приближенного нахождения коэффициента охвата как коэффициента Стьюдента с числом степеней свободы, определяемым по формуле Велча-Саттерсвейта. Такой способ оценивания коэффициента охвата не является идеальным, поскольку не учитывает влияние доминирующих составляющих неопределенностей типа *B*, закон распределения которых отличен от нормаль-

ного (например, равномерный), и корреляцию между входными величинами. Первый недостаток отмечается в Примечании к п. G.5.2 Руководства [3]. Наличие же корреляции вообще не учитывается формулой Велча-Саттерсвейта.

**Целью статьи** является изложение методики оценивания неопределенности измерений, в которой коэффициент охвата находится с учетом перечисленных факторов. Методика базируется на результатах имитационного моделирования, проведенного на кафедре метрологии и измерительной техники ХНУРЭ.

Основные этапы оценивания неопределенности измерений соответствуют общему алгоритму [5] и состоят в следующем.

**Составление модельного уравнения.** Модельное уравнение выражает зависимость между выходной *Y* и входными  $X_1, \dots, X_m$  величинами:

$$Y = f(X_1, \dots, X_m).$$

В качестве входных величин в модельное уравнение, кроме непосредственно измеряемых величин, входят переменные, значения которых и их неопределенности известны из внешних источников, а также поправки к результату измерения на известные систематические эффекты, основные и дополнительные абсолютные погрешности используемых средств измерительной техники. При составлении модельного уравнения используют рекомендации, приведенные в МІ 13.002–2003 [6].

**Оценивание входных величин, внесение поправок на систематические эффекты.** Значения входных величин находят путем их измерения с однократными или многократными наблюдениями или оценивания из внешних источников.

При проведении многократных измерений за значение *i*-й входной величины  $x_i$  принимают среднее арифметическое  $p_i$  результатов ряда отдельных наблюдений  $x_{iq}$ :

$$x_i = \bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}.$$

В полученные значения  $x_1, \dots, x_m$  вносят поправки на известные систематические эффекты. Эти поправки вносятся в модельное уравнение в качестве входных величин, и сами являются источниками неопределенности.

**Вычисление оценки результата измерения.** Оценку выходной величины  $y$  получают при подстановке в модельное уравнение оценок входных величин:

$$y = f(x_1, \dots, x_m).$$

В некоторых случаях (при равном числе наблюдений измеряемых многократно входных величин) для уменьшения влияния нелинейности модельного уравнения и учета наблюдаемой корреляции между входными величинами оценку выходной величины получают методом приведения:

$$y = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n f(x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{mq}).$$

**Вычисление стандартных неопределенностей входных величин.** Стандартные неопределенности входных величин выражают в виде стандартных отклонений и находят статистическими и нестатистическими методами, получая, соответственно, стандартные неопределенности типа А ( $u_A$ ) или стандартные неопределенности типа В ( $u_B$ ).

Стандартная неопределенность измерения типа А  $i$ -й входной величины находится по формуле

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i(n_i - 1)}}.$$

Она соответствует среднему квадратическому отклонению (СКО) результата измерения (среднего арифметического)  $i$ -ой входной величины, оцененному по результатам многократных наблюдений.

Стандартная неопределенность типа В  $i$ -ой входной величины находится в зависимости от априорной информации о изменчивости входной величины (табл. 1).

Таблица 1

Вычисление стандартной неопределенностей типа В входных величин

№ п/п	Априорная информация об изменчивости входной величины	Оценка стандартной неопределенности типа В
1.	Известно стандартное отклонение $i$ -й входной величины $s(X_i)$ .	Принимается равной известному стандартному отклонению $u_B(X_i) = s(X_i)$ .
2.	Известны ранее выполненные результаты многократных наблюдений $i$ -й входной величины $x_{iq}$ , $q=1, 2, \dots, n_i$ .	Вычисляется как стандартное отклонение $u_A(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i(n_i - 1)}}$ , где $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}$ .
3.	Можно оценить лишь верхнюю и нижнюю границы распределения входной величины $a_+$ , $a_-$ . Для симметричных распределений обычно известны границы отклонения от середины этого интервала $\Theta = (a_+ - a_-)/2$ .	Вычисляется по формуле: $u_B(x_i) = \Theta_i / \alpha_i$ , где $\Theta_i$ – границы отклонения $i$ -й входной величины; $\alpha_i$ – коэффициент, соответствующий принимаемому закону распределения внутри границ $\pm \Theta_i$ ; для равномерного (или неизвестного) закона распределения $\alpha_i = \sqrt{3}$ ; для треугольного закона распределения $\alpha_i = \sqrt{6}$ ; для закона арксинуса $\alpha_i = \sqrt{2}$ и т.д.
4.	Известны интервалы $U_{pi}$ с уровнем доверия $p$ .	В предположении нормального закона распределения определяется как $u_B(X_i) = U_{pi} / k_p$ , где $k_p$ – коэффициент охвата для нормального распределения, равный соответственно 1,64; 1,96 и 2,58 для уровня доверия $p = 0,95$ ; 0,95 и 0,99.

**Определение коэффициентов чувствительности.** Коэффициенты чувствительности  $c_i$  показывают, как оценка выходной величины  $y$  изменяется с изменением оценок входных величин  $x_1, \dots, x_m$ .

Их находят как частные производные выходной

величины по каждой из входной величин, оцененные при значениях входных величин:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_m}.$$

При прямых измерениях все коэффициенты чувствительности равны 1.

При линейной модельной функции

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m$$

коэффициенты чувствительности равны постоянным коэффициентам при входных величинах

$$c_1 = a_1; c_2 = a_2; \dots; c_m = a_m.$$

При модельной функции в виде произведения (частного от деления) степенных одночленов

$$Y = b X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \cdot \dots \cdot X_m^{a_m}$$

коэффициенты чувствительности находят как

$$c_i = a_i \cdot y / x_i.$$

Коэффициенты чувствительности соответствуют коэффициентам влияния, определяемым при оценке погрешностей косвенных измерений при нелинейной зависимости [7].

**Вычисление вклада неопределенности каждой входной величины в неопределенность измеряемой величины.** Вклад неопределенности  $u_i(y)$  каждой входной величины  $X_i$  в неопределенность  $u(y)$  измеряемой величины  $Y$  (суммарную неопределенность) определяют как произведение коэффициента чувствительности на неопределенность входной величины:

$$u_i(y) = c_i u(x_i).$$

**Порядок составления бюджета неопределенности.** Анализ неопределенности измерения, часто также называемый бюджетом неопределенности, должен содержать список всех входных величин  $X_1, \dots, X_m$ , их оценок  $x_1, \dots, x_m$  вместе с принадлежащими им стандартными неопределенностями измерения  $u(x_i)$  и законами их распределения, а также числами степеней свободы [8-12]. Для неопределенностей типа *A* (полученных из многократных повторных наблюдений) число степеней свободы на единицу меньше числа  $n_i$  проведенных наблюдений  $\nu_i = n_i - 1$ ; для неопределенности типа *B* число степеней свободы равно бесконечности ( $\infty$ ). Кроме этого, для каждой величины таблица должна содержать коэффициент чувствительности  $c_i$  и вклад неопределенности  $u_i(y)$ . Для занесенных в таблицу числовых значений должны указываться единицы измерения соответствующей величины.

**Порядок вычисления ковариаций входных величин.** Входные величины могут быть попарно коррелированы. Корреляция возникает в следующих случаях:

1. При одновременном наблюдении обеих входных величин  $X_i$  и  $X_k$  в одном измерительном эксперименте (наблюдаемая корреляция). В этом случае ковариация вычисляется по типу *A* по формуле

$$u(\bar{x}_i, \bar{x}_k) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k).$$

2. При наличии зависимости обеих входных величин  $X_i$  и  $X_k$  от одних и тех же независимых

друг от друга переменных  $Q_l$ ,  $l=1, 2, \dots, L$  (которые появляются при использовании одних и тех же средств измерительной техники, исходных величин или методов измерений)

$$X_i = f_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_L); X_k = f_k(Q_1, Q_2, \dots, Q_L),$$

предполагаемая (логическая) ковариация вычисляется по типу *B* по формуле

$$u(x_i, x_k) = \sum_{l=1}^L c_{il} \cdot c_{kl} \cdot u^2(Q_l),$$

где  $c_i$ ,  $c_k$  – коэффициенты чувствительности, выведенные из функций  $f_1$  и  $f_2$  по аналогии с выражением, приведенным в одноименном подпункте;

$u(Q_l)$  – стандартные неопределенности переменных  $Q_l$ ,  $l=1, 2, \dots, L$ .

Ковариацию двух входных величин  $X_i$  и  $X_k$  можно выразить через коэффициент корреляции  $\rho_{i,k}$ , определяемый как

$$\rho_{i,k} = \frac{u(x_i, x_k)}{u(x_i)u(x_k)},$$

причем  $-1 \leq \rho_{i,k} \leq 1$ .

В этом случае

$$u(x_i, x_k) = \rho_{i,k} u(x_i)u(x_k).$$

При наличии зависимости обеих входных величин  $X_i$  и  $X_k$  только от одной переменной  $Q$  коэффициент предполагаемой корреляции равен  $\pm 1$  [13].

Для полученных ковариаций удобно составить бюджет, аналогичный бюджету неопределенностей [5]. На главной диагонали таблицы будут находиться вариации (дисперсии) входных величин.

**Определение стандартной неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности).** Определение стандартной неопределенности выходной величины осуществляется по формулам, называемым *законом распространения неопределенности*.

При отсутствии корреляций между входными величинами стандартная неопределенность выходной величины определяется как

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y)}.$$

При наличии корреляций между входными величинами стандартная неопределенность выходной величины определяется как

$$\begin{aligned} u(y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m c_i c_k u(x_i, x_k)} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m u_{i,k}(y)}. \end{aligned} \quad (1)$$

При наличии бюджета ковариаций к квадратам вкладов входных величин  $u_i^2(y)$  добавляются все ковариации  $u_{i,k}(y)$  из таблицы ковариаций. Для

оценивания неопределенности выходной величины при наличии корреляций удобно воспользоваться также совмещенным бюджетом неопределенности, включающим бюджет ковариаций [10]. При равенстве коэффициента корреляции блока  $\pm 1$  его вклад неопределенности оценивается как

$$u_{i,k}(y) = |u_i(y) \pm u_k(y)| = |c_i u(x_i) \pm c_k u(x_k)|.$$

**Вычисление расширенной неопределенности.**

Расширенную неопределенность получают по формуле [14]

$$U = \sqrt{U_A^2 + U_B^2},$$

где  $U_A$ ,  $U_B$  – расширенные неопределенности типа  $A$  и  $B$ .

Расширенную неопределенность типа  $A$  оценивают как [15, 16]

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^m t_{0,95}^2(v_i) u_A^2(y_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m t_{0,95}(v_i) t_{0,95}(v_k) u_{A_{i,k}}(y)},$$

где  $u_{A_i}(y)$  – вклад неопределенности  $i$ -ой входной величины, оцененный по типу  $A$ ;

$u_{A_{i,k}}(y) = c_i c_k u(x_{A_i}, x_{A_k})$  – наблюдаемая ковариация вкладов входных величин  $X_i$ ,  $X_k$ ;

$t_{0,95}(v_i)$  – коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы  $v_i = n_i - 1$ .

При отсутствии наблюдаемой корреляции выражение для расширенной неопределенности типа  $A$  упрощается:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^m t_{0,95}^2(v_i) u_A^2(y_i)}.$$

Расширенную неопределенность типа  $B$  оценивают как

$$U_B = k_B \sqrt{\sum_{i=1}^m u_B^2(y_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m u_{B_{i,k}}(y)},$$

где  $k_B$  – значение коэффициента охвата для составляющих, оцененных по типу  $B$ .

При отсутствии логической корреляции это выражение упрощается:

$$U_B = k_B \sqrt{\sum_{i=1}^m u_B^2(y_i)},$$

причем значение  $k_B$  определяется из табл. 2, 3 [17].

В табл. 2 приведены значения коэффициента охвата для равномерно распределенных входных величин. Величина  $|u_2(y)/u_1(y)|$  соответствует модулю отношения второго по величине вклада неопределенности к наибольшему вкладу неопределенности. При наличии вклада неопределенности, распределенного по треугольному закону, его представляют как композицию двух вкладов, распределенных по равномерному закону, причем неопределенность каждого вклада в  $\sqrt{2}$  раз меньше неопре-

деленности исходного вклада.

При наличии нормально распределенных вкладов неопределенности их объединяют в единый вклад с неопределенностью, рассчитанной в соответствии с законом распространения неопределенности. Значения коэффициента охвата для отношения неопределенности нормально распределенного вклада к неопределенности наибольшего равномерно распределенного вклада  $u_H(y)/u_1(y)$  при разных отношениях второго по величине равномерно распределенного вклада к наибольшему равномерно распределенному вкладу  $u_2(y)/u_1(y)$  приведены в табл. 3.

При наличии логической корреляции значение  $k_B$  определяется, исходя из следующих соображений.

При суммировании только нормально распределенных вкладов при любом значении коэффициента корреляции форма их закона распределения не изменяется и  $k_B = 1,96$  для уровня доверия 0,95.

При суммировании одинаково распределенных вкладов неопределенности при коэффициенте корреляции  $\pm 1$  форма их суммарного закона распределения не меняется и  $k_B$  берется для исходного закона распределения (1,4 – для закона арксинуса; 1,65 – для равномерного, 1,9 – для треугольного, 1,96 – для нормального).

При суммировании аномальных вкладов при коэффициенте корреляции, отличном от  $\pm 1$ , необходимо воспользоваться методом эксцессов [18].

**Вычисление коэффициента охвата.** Значение коэффициента охвата определяется по формуле

$$k = U/u(y).$$

**Запись полного результата измерения.** Полный результат измерения включает в себя оценку выходной величины и приписанное ей значение расширенной неопределенности с указанием уровня доверия:

$$Y = y \pm U, p = 0,95.$$

Значение расширенной неопределенности указывается с числом значащих цифр, не более двух. Результат измерения, как и значения входных величин, округляют так, чтобы они соответствовали своим неопределенностям.

**Выводы.** Изложена методика оценивания неопределенности измерений, в которой применены достоверные оценки коэффициента охвата, полученные на основании аппроксимации результатов имитационного моделирования. В методике введены понятия «расширенная неопределенность типа  $A$  и  $B$ », «коэффициент охвата для составляющих типа  $B$ », а вычисление расширенной неопределенности предваряет вычисление коэффициента охвата. Это позволяет производить оценивание этих параметров с учетом наблюдаемой и логической корреляции.

Таблиця 2

Значения коэффициентов охвата для равномерно распределенных составляющих неопределенности

$ u_2(y)/u_1(y) $	1...0,8	0,9	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
k	1,94	1,93	1,92	1,90	1,87	1,82	1,75	1,68

Таблиця 3

Значения коэффициентов охвата для композиции равномерно и нормально распределенных входных величин

$ u_2(y)/u_1(y) $	$ u_H(y)/u_1(y) $									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	1,65	1,69	1,73	1,77	1,81	1,84	1,87	1,89	1,91	1,92
0,1	1,68	1,7	1,74	1,78	1,82	1,85	1,87	1,89	1,91	1,92
0,2	1,73	1,75	1,78	1,81	1,84	1,86	1,88	1,9	1,91	1,92
0,3	1,8	1,81	1,82	1,84	1,86	1,88	1,89	1,91	1,92	1,93
0,4	1,85	1,85	1,86	1,87	1,88	1,89	1,91	1,92	1,92	1,93
0,5	1,88	1,89	1,89	1,9	1,9	1,91	1,92	1,92	1,93	1,94
0,6	1,91	1,91	1,91	1,91	1,92	1,92	1,93	1,93	1,93	1,94
0,7	1,92	1,92	1,92	1,92	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94
0,8	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94	1,94
0,9-1,0	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94

**ЛИТЕРАТУРА**

- Mutual recognition of national measurement standards and of calibration and measurement certificates issued by national metrology institutes. – Paris: International Committee for Weights and Measures, 1999.
- ДСТУ ISO/IEC 17025 – 2001. Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій. – К.: Держстандарт України, 2001.
- Giacomo P. The expression of Experimental Uncertainties (Recommendation INC-1), BIPM // Metrologia. – 1981. – № 11. – P. 73.
- Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.
- Захаров И.П. Неопределенность измерений: общие подходы к составлению бюджета неопределенности // Украинский метрологический журнал. – 2004. – № 2. – С. 10-15.
- МІ 13.002-2003. Методика обґрунтування рівнянь вимірювань та оцінки методичної складової похибки (невизначеності) результатів вимірювань. – Х.: ХДНДІМ, 2003. – 11 с.
- МИ 2083-90. ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 9 с.
- Захаров И.П. Составление бюджета неопределенности прямых измерений // Украинский метрологический журнал. – 2004. – № 3. – С. 6-12.
- Захаров И.П. Составление бюджета неопределенности косвенных измерений с некоррелированными входными величинами // Украинский метрологический журнал. – 2004. – № 4. – С. 33-39.
- Захаров И.П. Составление бюджета неопределенности косвенных измерений с коррелированными входными величинами // Украинский метрологический журнал. 2005. – № 1. – С. 7-15.

- Захаров И.П. Составление бюджета неопределенности нескольких групп прямых измерений // Украинский метрологический журнал. – 2005. – № 2. – С. 5-11.
- Захаров И.П. Составление бюджета неопределенности совместных измерений // Украинский метрологический журнал. – 2005. – № 3. – С. 15-18.
- Захаров И.П., Сергиенко М.П. Оценивание неопределенности метрологической идентификации динамических характеристик средств измерительной техники // Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ», 2005. – Вып. 38. – С. 40-49.
- Захаров И.П. Исследование и повышение достоверности интервальных оценок точности прямых многократных измерений // АСУ и приборы автоматизации. – 2005. – Вып. 132. – С. 106-109.
- Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента // Системы обработки информации. – Х.: ХУПС, 2005. – Вып. 8. – С. 28-35.
- Захаров И.П. Учет корреляции при оценивании неопределенности результатов многократных измерений // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, 2005. – Вып. 9. – С. 43-45.
- Захаров И.П. Расчет коэффициента охвата для нормально и равномерно распределенных составляющих неопределенности // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, 2005. – Вып. 6. – С. 52-57.
- Захаров И.П. Вычисление коэффициента охвата композиции коррелированных и некоррелированных составляющих неопределенности измерения // Збірник наукових праць ХУ ПС. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вып. 6 (6). – С. 61-63.

Поступила 31.03.2006

**Рецензент:** д-р. техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.