УДК 006.91.001 : 5 3.088.2

Е.Т. Володарский, Л.А. Кошевая, А.Н. Карпенко

ВЗАИМОСВЯЗЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА И НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ПРИ ОЦЕНКЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматриваются основные положения теории нечетких множеств, применение которых в технике измерений позволяет, используя единый подход, оценить неопределенность результата измерений на базе интервального анализа.

нечеткие множества, неопределенность результатов измерений, распределение вероятностей, распределение возможностей, α-срез

С целью унификации подхода оценивания точности результатов измерений, применяемого ко всем видам измерений и типов данных в 1993 г., было разработано «Руководство по выражению неопределенности измерений» [1].

Неопределенность измерений является выражением того факта, что данному результату измерения может соответствовать не одно значение измеряемой величины, а неопределенное число значений, рассеянных вокруг результата, которые согласуются с результатами наблюдений, а также знаниями оператора физической природы явлений, связанных с измерением и которые с разной степенью доверия могут быть приписаны измеряемой величине.

В Руководстве неопределенность результата измерений классифицируется не по характеру проявления, как это делается в теории погрешностей, т.е. на систематическую и случайную составляющие, а по методу оценивания. Причем, если неопределенность по типу А оценивается на основании статистического анализа статистических данных, то неопределенность по типу В оценивается на основании предполагаемой функции плотности распределения вероятностей, основанной на степени доверия, которую часто называют субъективной вероятностью. При этом, для оценки стандартной неопределенности по типу В требуется интуиция, основанная на экспериментальных и общих знаниях и являющаяся искусством, которому можно научиться только в сочетании с практикой. В дополнение к вышесказанному следует заметить, что неопределенность по типу А, основанная на сравнительно малом объеме экспериментальных данных, может характеризоваться скорее степенью доверия, чем достоверностью, что также носит субъективный характер.

Таким образом, термин «неопределенность результата измерения» отражает недостаток исчерпывающего знания значения измеряемой величины. Все это говорит в пользу того, что в практику измерений необходимо вводить теорию нечетких мер, которая позволит с единых позиций рассматривать различные виды неопределенности, учесть наилучшим образом специфику экспериментальных процедур, имеющих место при измерениях, и положительные свойства и достижения других теорий. При этом не преследуется цель дискредитации теории вероятностей, а, наоборот, показать, что существуют ситуации, в которых применение методов, отличных от теории вероятностей, может дать лучшие результаты. Как показано в [2] нечеткая мера может рассматриваться как обобщение понятия вероятностной меры, свободное от ряда ограничений, в том числе требований аддитивности.

Развитие теории нечеткой логики стало закономерным следствием неспособности традиционных методов, основанных на применении точных подходов к решению задач, обладающих слабо формализованными и ненадежными исходными данными. Основой развития новой математической теории послужила работа профессора Калифорнийского университета Л. Заде [3], который создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, ввел такие понятия как «возможно» и «необходимо», которые в неявном виде существовали даже при применении теории вероятностей, где гипотезы и предпосылки выдвигаются после того, как экспериментатор (эксперт) в полной мере исследует исходные данные, оценит общую структуру проблемы, исключит субъективные и противоречивые данные и сделает субъективные выводы

Рассмотрим пример перехода [4] от распределения вероятностей к распределению возможностей, что, в конечном итоге, позволит производить нечеткое выражение неопределенности результатов измерений и, в дальнейшем, используя интервальные оценки, осуществлять обработку косвенных измерений, не требуя нахождения частных производных, как это делается в [1].

В классической теории множеств принадлежность элемента x множеству A записывается в виде $x \in A$, что может быть также представлено при помощи характеристической функции

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \; x \in A; \\ 0, \; x \notin A, \end{cases}$$

которая принимает только два значения $\{0,1\}$.

Л. Заде в [3] предложил расширить этот диапазон до интервала [0,1], а характеристическую функцию назвал функцией принадлежности (membership function) и разработал математический аппарат для работы с такими множествами. В соответствии с данной теорией любое нечеткое число может быть представлено с помощью его α-срезов. Под α-срезом нечеткого множества A понимается четкое множество, определяемое следующим выражением

$$A_\alpha = \{x \mid \mu(x) \ge \alpha\}, \qquad (1)$$

где α – любое число, лежащее в интервале [0,1].

Таким образом, α-срез – это такое четкое множество, в которое входят элементы x, для которых функция принадлежности $\mu(x) \ge \alpha$, причем любое нечеткое число может быть представлено с помощью его срезов

$$A_\alpha = \cup \alpha A_\alpha . \qquad (2)$$

Например, пусть X = $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Нечеткое множество представляется выражением

$$A = \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}3}{3} + \frac{0{,}6}{4} + \frac{0{,}8}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0{,}7}{7} + \frac{0{,}4}{8} + \frac{0{,}2}{9}. \qquad (3)$$

Тогда, в соответствии с (1) представим это нечеткое множество при помощи α-срезов. В данном выражении каждое слагаемое включает функцию принадлежности – дробное число, равное α, и соответствующий элемент множества X, входящий в нечеткое множество A. Это нечеткое множество можно представить в виде суммы α-срезов. Так, взяв, например, α = 0,3 запишем для данного значения α-срез

$$0{,}3 \cdot A_{0,3} = 0{,}3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right).$$

Здесь «1» показывает, что соответствующий элемент входит в данный α-срез. В соответствии с (1) элементы x = 2 с α =0,1 и x =9 с α = 0,2 отсутствуют, т.к. их значения меньше значения рассматриваемого α-среза, равного 0,3. Аналогично рассуждая, используя (2), запишем выражение (3) при помощи суммы α-срезов

$$\begin{aligned} A = \sum \alpha A_\alpha &= 0{,}1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \\ &+ 0{,}2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + ,3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + 0{,}4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ &+ 0{,}6 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + 0{,}8 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + 1 \cdot \frac{1}{6}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Графическое выражение (4) может быть представлено следующим образом (рис. 1).

В начале строим α = 0,2 – срез, который включает x = 2, 3, …, 9 и представляет собой прямоугольники с основанием x = (9–2) и высотой α = 0,1. Затем прямоугольник с высотой α = 0,2 и основанием, включающим от x = 3 до x = 9 и т.д. Очевидно, что при $\Delta\alpha \to 0$ функция принадлежности стремится к непрерывной кривой.

Рис. 1. Функция принадлежности

Рассмотренный подход позволяет выразить неопределенность измерений при помощи нечеткого множества.

Предположим, что результат измерения распределен по нормальному закону. Разобьем интервалы [–3σ,0] и [0,3σ] на равное количество элементарных интервалов. Здесь все множество возможных значений представлено в виде двух интервалов для учета возможных ассиметричностей распределения плотности вероятностей. Обозначим число элементарных интервалов n , которое является одним и тем же для обеих половин распределения. Тогда для левой части относительно моды распределения ширина элементарного интервала будет равна

$$b = \left|x_{(-3\sigma)}\right| / n ,$$

а для правой части $\tilde{n} = \left|x_{(3\sigma)}\right| / n$.

Тогда для $j = \overline{0,(n-1)}$ можно записать

$$P\left(x_{(-3\sigma)} + jb < x < x_{(3\sigma)} - jc\right) = \int_{x_{(-3\sigma)}+jb}^{x_{(3\sigma)}-jc} p(x)dx = 1 - \alpha_j .$$

Как видно из данного соотношения интервал

$$[(x_{(-3\sigma)} + jb),(x_{(3\sigma)} - j\tilde{n})]$$

охватывает все возможные значения результатов измерений, принадлежащие этому интервалу, и для которых выполняется неравенство $\alpha_{x\,к} \le \alpha_j$, причем значения α_j и $\alpha_{x\,к}$ изменяются в диапазоне [0,1].

Как видно из приведенного выше, существует аналогия между уровнем статистической значимости α для плотности распределения вероятностей и α-срезом функции принадлежности нечеткого множества. Поэтому имеется возможность установить зависимость между плотностью распределения вероятностей p(x) и функцией принадлежности нечеткого множества μ(x). Для этого необходимо, чтобы те и только те значения, которые попадают в интервал с доверием $(1 - \alpha_j)$, принадлежали четкому множеству для среза α, значение которого равно уровню статистической значимости α.

На рис. 2 показано построение функции принадлежности для нормального закона.

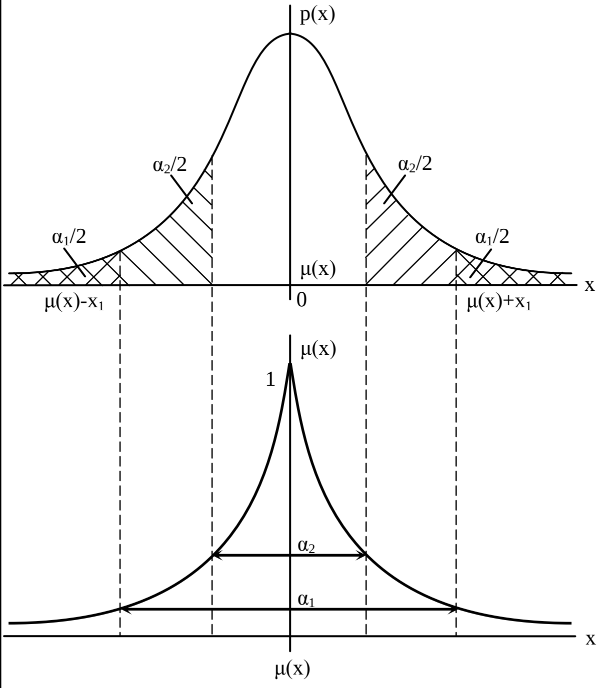

Рис. 2. Построение функции принадлежности для нормального закона

Ординаты α_j, отсекаемые на оси μ(x), соответствуют уровню статистической значимости для интервала с уровнем доверия $(1 - \alpha_j)$, т.е.

$$\mu(x_j) = \alpha_j = 1 - \int_{\mu(x)-x_j}^{\mu(x)+x_j} p(x)dx, \quad x_j \in [0, \infty].$$

Такой подход в полной мере соответствует исходному оцениванию неопределенности. Так, в [1] расширенная неопределенность трактуется как «…интервал вокруг результата измерения, в пределах которого, *как можно ожидать* (выделено нами), находится большая часть распределения значений, которые с *достаточным* основанием *могли* бы быть приписаны измеряемой величине».

В теории нечетких множеств наряду с функцией принадлежности вводится такое понятие, как нечеткая мера возможности, которая для случая вложенности элементов нечетких подмножеств, что имеет место для α-срезов, определяется с помощью распределения возможностей π(x) [2]. Если сопоставить эти положения с определением расширенной неопределенности, то можно придти к выводу, что последняя как раз и характеризуется нечеткой мерой возможности.

Исходя из этих позиций для упрощения работ с распределением функции возможности в [4] была предложена модель псевдотреугольной функции принадлежности (псевдотреугольное распределение ПТР) (рис. 3).

Четыре значения x_c, x_n, x_ε и ε полностью характеризуют предложенную модель. Для унимодальных законов значению x_c соответствует значение моды. Для таких законов, как равномерный, в качестве x_c берется значение математического ожидания. Для законов с ограниченными значениями плотности распределения (треугольный, равномерный) в качестве критерия определения x_n предлагается использовать предельное значение x, при котором еще будет выполняться соотношение $p(x) > 0$. Для таких законов, как нормальный, x_n выбирается равным

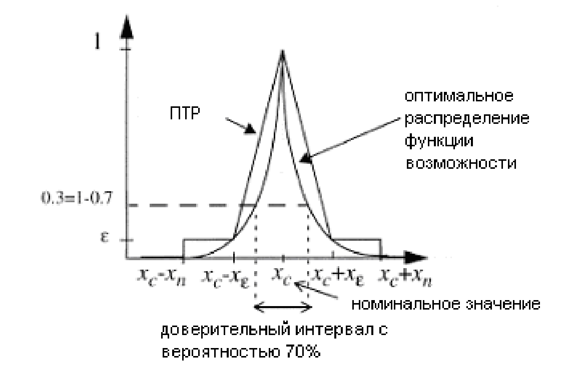

Рис. 3. Модель псевдотреугольного распределения

границе интервала с уровнем доверия 0,99.

Значение параметра ε выбирают исходя из допустимой вероятности ошибочных решений (максимальной определенности)

$$\varepsilon = \pi_{optimal}(x_\varepsilon) = 2\int_{x_\varepsilon}^{\infty} p(t)dt\,.$$

Отправным пунктом при обработке результатов измерений функционально связанных величин

$$Y = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

является соотношение

$$ПТР_Y = f(ПТР1, ПТР2, \ldots, ПТР_N).$$

На первоначальном этапе производится декомпозиция ПТР на треугольное и прямоугольное распределения (рис. 4).

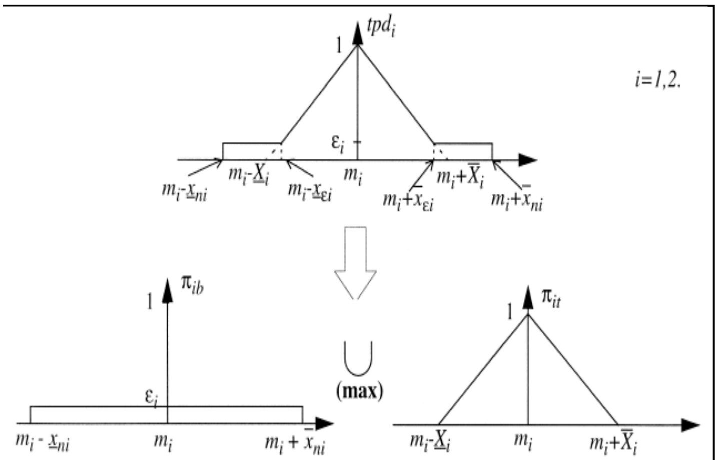

Рис. 4. Декомпозиция псевдотреугольного распределения

На втором этапе, исходя из декомпозиции распределений определяют параметры для результирующей треугольной π_{Yt} и прямоугольной π_{Yb} функций возможностей.

На завершающем этапе выполняется рекомбинирование распределений функции возможности путем выполнения операции максимума над π_{Yt} и π_{Yb}, т.е.

$$ПТР_Y = \max(\pi_{Yt}, \pi_{Yb}).$$

При этом, как показано в [4], форма результирующей ПТР сохраняется не зависимо от выполняемых операций, а основным преимуществом такого подхода по сравнению с вероятностными моделями – это простота обработки, особенно при косвенных измерениях, отсутствие необходимости определения частных производных. Однако, следует также заметить, что при большом количестве операций данный подход обладает некоторой избыточностью.Таким образом, применение элементов теории нечетких множеств позволяет с единых позиций рассмотреть неопределенность результата измерений, независимо от природы ее возникновения, перейти к интервальным оценкам, что существенно облегчает обработку результатов, особенно при косвенных измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руководство по выражению неопределенности измерения: Пер. с англ. / Под ред. В.А. Слаева. – СПб.: ВНИИМ им Д.И. Менделеева, 1999. – 126 с.

2. *Бочарников В.П.* Fuzzy-технология. Математические основы. Практика моделирования в экономике. – СПб.: Наука, РАН, 2001. – 328 с.

3. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and control. – 1965. – 8. – P. 338-353.

4. *Mauris G., Berrah L., Fonlloy L.* Fuzzy handling of measument errors in instrumentation, 2000. – 232 p.

Поступила 10.03.2006

Рецензент: канд. техн. наук, доц. А.Б. Егоров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.