УДК 519.876.2:519.876.3+519.863

М.В. Новожилова[1], Н.А. Попельнюх[1], И.В. Беленченко[2]

[1]*Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры*
[2]*Государственная инспекция гражданской обороны и техногенной безопасности, Киев*

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ В ПОЛОСЕ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ ИХ РАЗБИЕНИЯ

Разработана методика решения оптимизационной задачи размещения прямоугольников в полосе с учетом возможности их разбиения. Построена математическая модель задачи, основанная на применении аппарата Ф-функций и структур линейных неравенств, исследованы свойства области допустимых решений.

геометрическое проектирование, задача размещения, параметры размещения, структура линейных неравенств, аппарат Ф-функций

Введение

Постановка проблемы. При решении большинства задач проектирования так или иначе необходимо учитывать геометрические особенности проектируемых объектов, что позволяет выделить ряд таких задач в отдельный класс задач геометрического проектирования [4], основанный на применении аппарата Ф-функций [4]. Одной из задач оптимизационного геометрического проектирования является 2D задача размещения геометрических объектов в полубесконечной полосе [4], для которой необходимо найти локальный или глобальный экстремум целевой функции. Практически всегда считается, что объекты размещения в таких задачах имеют неизменные метрические характеристики. Однако существует огромный класс практических задач (например, задачи управления проектами [6]), где необходимо предусмотреть возможность изменения топологических и метрических характеристик объектов.

Цель работы – построение модели и анализ методики решения задачи размещения прямоугольников в полубесконечной полосе заданной ширины с учетом возможности их разбиения.

Анализ публикаций. Задача размещения прямоугольников в исходной постановке исследована в [4]. В рамках теории оптимизационного геометрического проектирования разработаны как эвристические (метод одиночно-последовательного размещения [3], метод вектора спада [4]), так и точные (метод ветвей и границ [2]) методы ее решения.

Постановка задачи

Имеется конечное множество ориентированных прямоугольников $R=\{R_i\}$, $i=1,2,...,n$, заданных в евклидовом пространстве R^2, и полубесконечная полоса

$$S_0=\{(x,y)\in R^2 \mid x\in[0,L), y\in[0,W]\}.$$

Для каждого R_i известны его метрические характеристики (a_i,b_i). Каждый R_i имеет свои параметры размещения [4] $u_i=(x_i,y_i)$, задающие его положение в пространстве R^2, и являющиеся началом собственной системы координат объекта. Графическое представление постановки задачи показано на рис. 1.

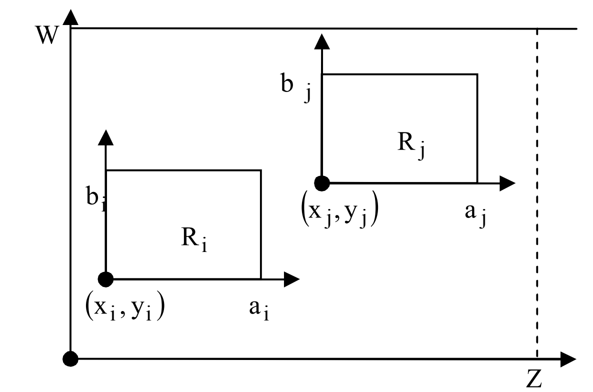

Рис. 1. Графическое представление постановки задачи

Пусть на множестве R задано отношение частичного упорядочения [1], задаваемое условием

$$x_g-x_\mu=a_\mu; g\neq\mu;\ g,\mu=\overline{1,T};\ T<J. \qquad (1)$$

Пусть на множестве $\hat R=\{\hat R_j\}$, $j=1,2,...,J$, $J\le n$, $\hat R\subset R$, имеет место разбиение любого $\hat R_j$ вида

$$a_j^1+a_j^2=a_j;\ 0<a_j^1<a_j;\ a_j^1,a_j^2\ge 0; a_j^1,a_j^2\in R^1. \quad (2)$$

Необходимо разместить n прямоугольников в S_0 так, чтобы длина занятой части полосы Z была минимальной.

Математическая постановка задачи размещения без учета условия (2) имеет следующий вид.

Найти

$$Z\to\min_{u\in D\subset R^{2n+1}}, \qquad (3)$$

где область допустимых решений D в евклидовом пространстве R^{2n+1} описывается системой линейных неравенств, задающих условия размещения R_i в S_0:

$$\begin{cases} x_i\le Z-a_i;\\ y_i\le W-b_i;\\ x_i\ge 0;\\ y_i\ge 0; \end{cases} \quad i=1,2,...,n, \qquad (4)$$

и структурой линейных неравенств [4], задающих условия взаимного попарного непересечения R_i:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_j-x_i\ge a_i;\\ x_i-x_j\ge a_j;\\ y_j-y_i\ge b_i;\\ y_i-y_j\ge b_j; \end{array}\right. \quad i,j=1,2,...n;\ i\neq j;\\ x_g-x_\mu=a_\mu;\ g\neq\mu;\ g,\mu=\overline{1,T}, \end{cases} \qquad (5)$$

причем для каждой пары объектов достаточно выполнения только одного из приведенных условий взаимного непересечения. Касание объектов описывается структурой строгих равенств.

Область D (несвязная, компоненты связности невыпуклые, границы области – кусочно-линейные) может быть представлена в виде

$$D=\cup D_s;\ s=1,2,...,4^{n(n-1)/2}, \qquad (6)$$

где $D_s\subset R^{2n+1}$ – выпуклый компакт [1].

Количество ограничений задачи (3) – (5)

$$N - 4n+4^{n(n-1)/2}.$$

Решение задачи

Решение проводится в два этапа.

Этап 1: ограничение (2) не рассматривается. Решается релаксированная задача методами локальной или глобальной оптимизации (в зависимости от размерности задачи). Результатом решения этапа 1 становится некоторый вектор

$$u^*=\arg\min_D Z;\ u^*\in D_s,$$

в общем случае $s>1$. Полученная точка u^* является начальной для 2-го этапа.

Этап 2: поиск локально оптимального решения задачи в окрестности u^* с учетом (2). На этапе 2 постановка задачи (3) – (5) уточняется таким образом.

Рассмотрим объект $\hat R_j$ с разбиением

$$\hat R_j^1:\left(\hat x_j^1,\hat y_j^1\right)=\left(\hat a_j^1=1,\hat b_j\right);\ \hat R_j^2:\left(\hat x_j^2,\hat y_j^2\right)=\left(\hat a_j^2,\hat b_j\right), \quad (7)$$

где $\left(\hat x_j^1,\hat y_j^1\right)$ – параметры размещения $\hat R_j^1$.

Отметим, что a_j^1,a_j^2 становятся переменными величинами. Это увеличивает размерность задачи.

Дополним систему (4) ограничениями вида:

$$\begin{cases} \hat x_j^k\le Z-\hat a_j^k;\\ \hat y_j^k\le W-\hat b_j;\\ \hat x_j^k\ge 0;\ \hat y_j^k\ge 0;\ k=\overline{1,2};\ j=1,2,...,J;\ J\le n, \end{cases} \qquad (8)$$

а структуру неравенств (5) – условиями:

$$\left[\begin{array}{l} \hat x_j^1-\hat x_j^2-\hat a_j^2\ge 0;\ \hat x_j^2-\hat x_j^1-\hat a_j^1\ge 0;\\ \hat y_j^1-\hat y_j^2\ge\hat b_j;\ \hat y_j^2-\hat y_j^1\ge\hat b_j; \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} j=1,2,...,J;\\ J\le n; \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_i-\hat x_j^k-\hat a_j^k\ge 0;\ \hat x_j^k-x_i\ge a_i;\\ y_i-\hat y_j^k\ge\hat b_j^k;\ \hat y_j^k-y_i\ge b_i. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} i\neq j;\\ k=\overline{1,2}. \end{array} \qquad (9)$$

Целевая функция задачи имеет вид

$$Z\to\min_{u\in D^{II}\in R^{2(n+J)+4J+1}}. \qquad (10)$$

Количество ограничений задачи (8) – (10) этапа 2:

$$N^{II} - 4(n+J) + 4^{(n+J)(n+J-1)/2}.$$

Область допустимых решений задачи (8) – (10) $D^{II} \subset R^{2(n+J)+4J+1}$ может быть представлена как $D^{II} = \cup D_s^{II}$, $s = 1, 2, ..., 4^{(n+J)(n+J-1)/2}$, где подобласть D_s^{II} сохраняет свойство выпуклости.

Предположим, что на этапе 1 был выбран один из методов глобальной оптимизации, например, метод ветвей и границ [4]. В рамках метода ветвей и границ область D строится при помощи дерева решений A [2]. Для дерева решений A разработана система правил отсечения вершин [2, 4].

В данной работе предлагается модификация дерева решений, учитывающая возможность разбиения размещаемых объектов, заданную условием (2). Основной идеей данной модификации является обеспечение последовательной проверки возможности разбиения объектов размещения на два подобъекта.

Рассмотрим методику решения задачи.

Анализируем некоторую (одну) подобласть $D^*_s \subset D$: ищем возможность получения размещения $\hat{R}_j^1$ и $\hat{R}_j^2$ с учетом условий (8) – (10). Фактически, от вершины последнего уровня дерева решений A, формирующей подобласть D^*_s, производим ответвление нового уровня дерева A2 с вершинами $D_s^{II} \subset D^{II}$. D_s^{II} включают ограничения (4) –(5) и условия (8) – (9). Отметим, что все неравенства, описывающие связи неразбитых объектов, преобразовываются в условия касания.

Условием выбора D_s^{II} является наличие в ее структуре неравенств вида:

$$x_i - \hat{x}_j^k - \hat{a}_j^k \ge 0 \quad \text{или} \quad y_i - \hat{y}_j^k \ge \hat{b}_j^k. \tag{11}$$

Модификация дерева решений приводит к новому правилу отсечения

$$D_s^{II^*} \ne \varnothing. \tag{12}$$

Реализация данного правила отсечения осуществляется на основе использования симплекс-метода [5].

Приводим неравенства (8) – (9) к стандартной форме ограничений линейных оптимизационных моделей [5]

$$x_i - \hat{x}_j^k - \hat{a}_j^k - s_g = 0,$$

где $s_g \ge 0; g = 1, 2, ..., G$; G – количество неравенств в системе. Уравнения условий касания R_i не преобразовываем. Получаем задачу:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a_i) + \sum_{g=1}^{G} Ms_g; \quad Z \to \min;$$

$$s_g \ge 0; x_i, \hat{x}_j^k \ge 0; y_i, \hat{y}_j^k \ge 0;$$

$$\begin{cases} x_i - z + s_g = a_i; & y_i - w + s_g = b_i; \\ \hat{x}_j^k - z + \hat{a}_j^k + s_g = 0; & \hat{y}_j^k - w + s_g = \hat{b}_j^k; \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_j^1 - \hat{x}_j^2 - \hat{a}_j^2 - s_g = 0; \\ \hat{x}_j^2 - \hat{x}_j^1 - \hat{a}_j^1 - s_g = 0; \\ \hat{y}_j^1 - \hat{y}_j^2 - s_g = \hat{b}_j; \\ \hat{y}_j^2 - \hat{y}_j^1 - s_g = \hat{b}_j; \end{bmatrix} \quad i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, 2};\ j = 1, 2, ..., J;\ J \le n;$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_j^k - x_i - s_g = a_i; & x_i - \hat{x}_j^k - \hat{a}_j^k - s_g = 0; \\ \hat{y}_j^k - y_i - s_g = b_i; & y_i - \hat{y}_j^k - s_g = \hat{b}_j^k; \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_j - x_i = a_i; & x_i - x_j = a_j; & i, j = 1, 2, ..., n; \\ y_j - y_i = b_i; & y_i - y_j = b_j. & i \ne j, \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Решаем задачу (13) симплекс-методом [5]. Если $D_s^{II^*} \ne \varnothing$, то используемые в методе вычислительные процедуры приведут к $s_g > 0$ в оптимуме.

Шаг 3. В противном случае на итерации, приводящей к оптимуму, по крайней мере, одна $s_g < 0$.

Шаг 4. Решаем задачу размещения (10) на подобласти $D_s^{II^*}$, например, методом последовательно-одиночного размещения. Если удалось достичь в окрестности u^* локальный оптимум, то переходим к шагу 4. В противном случае возвращаемся к шагу 1.

Шаг 5. Размещение будет считаться локально оптимальным в окрестности u^*, если разбиением хотя бы одного $\hat{R}_j$ удалось добиться уменьшения Z.

Вывод

Рассмотрена общая постановки задачи размещения прямоугольников в полубесконенчной полосе. Предложена постановка задачи и алгоритм ее решения с учетом возможности разбиения объектов.

Список литературы

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.*

2. *Об одном способе поиска оптимального размещения прямоугольных гиперпараллелепипедов: препринт АН Украины № 365. / М.В. Новожилова, А.А.Черноморец. – Х.: ИПмаш, 1992. – 27 с.*

3. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – К.: Наук. думка, 1976. – 248 с.*

4. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 266 с.*

5. *Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х томах. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, – 1985. – 479 с.*

6. *Управление проектами. Зарубежный опыт. / Под ред. В.Д. Шапиро. – СПб.: ДваТрИ, 1993. – 443 с.*

Поступила в редакцию 3.07.2006

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Руткас, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.