УДК 629.056.6

В.И. Кортунов, Г.А. Проскура

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

# УРАВНЕНИЯ ОШИБОК БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ И АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМОСТИ

В статье приведен анализ уравнений ошибок бесплатформенных инерциальных систем навигации летательных аппаратов и получены уравнения ошибок определения навигационных параметров, применимые для широкого диапазона инструментальных ошибок инерциальных датчиков. Рассмотрены вопросы анализа наблюдаемости инструментальных ошибок бесплатформенных инерциальных систем навигации. Дан анализ наблюдаемости для различных моделей инструментальных ошибок с последующим установлением их обнаруживаемости (в случае невыполнения условия полной наблюдаемости).

кватернион, наблюдаемость, обнаруживаемость, инструментальные ошибки датчиков, бесплатформенная инерциальная навигационная система

#### Введение

При решении задачи повышения точности бесплатформенных инерциальных систем навигации (БИНС) летательных аппаратов на недорогих миниатюрных твердотельных датчиках особое значение приобретает задача коррекции [1]. Наиболее часто для решения этой задачи применяется подход, основанный на использовании в расширенном фильтре Калмана (ФК) модели инструментальных ошибок датчиков [2]. Метод коррекции с ФК требует тщательного подхода к выбору уравнений ошибок БИНС, адекватность которых необходимо проверять для всего диапазона имеющихся величин ошибок.

В основном в публикациях используются упрощенные уравнения ошибок с нулевой рабочей точкой [2 – 6]. Так в [3] подробно изложены линейные уравнения ошибок для параметров ориентации БИНС – обобщенных углов Эйлера-Крылова или параметров малого поворота. Подобные уравнения применимы только при малой величине ошибок датчиков. Для больших диапазонов ошибок используются нелинейные модели. Существует три физически различных способа получения нелинейных уравнений ошибок БИНС: с помощью направляющих косинусов, с помощью последовательности плоских поворотов вокруг координатных осей на

углы Эйлера-Крылова и с помощью параметров, определяющих вектор конечного поворота [6]. Для группы параметров Родрига-Гамильтона, вектора конечного поворота существует ряд формальных способов задания преобразования, но самым удобным из них является формализм операций над кватернионами [6]. Так в [6] уравнения ошибок БИНС получены на основе кинематических соотношений, использующих кватернионный подход. При получении уравнений были допущены некоторые упрощения, влияющие на их адекватность для широкого диапазона величин ошибок.

В статье приведена методика получения уравнений ошибок БИНС при ненулевой рабочей точке и проводится анализ уравнений. Получены нелинейные уравнения для широкого диапазона инструментальных погрешностей датчиков для неидеальных параметров БИНС.

# 1. Нелинейные уравнения ошибок бесплатформенных инерциальных навигационных систем

В получении нелинейных уравнений для ошибок навигационной системы используем аппарат кватернионов, как наиболее удобный для формального описания кинематических преобразований и имеющий ясную физическую интерпретацию [6]. Обозначим кватернион как  $\pi$ , составленный из параметров Родрига-Гамильтона  $\pi = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$ . Тогда операция кватернионного умножения запищется

$$\mathbf{n_{bn}} = \mathbf{n_{ni}^*} \otimes \mathbf{n_{bi}}, \qquad (1)$$

где  $\mathbf{n_{bi}}$  — кватернион, характеризующий поворот из связанной системы координат (СК) в инерциальную;  $\mathbf{n_{ni}^*}$  — кватернион, характеризующий поворот из инерциальной СК в навигационную (сопряженный кватернион).

Операция (1) определяет поворот от связанной системы координат в навигационную. Соответствующие уравнения Пуассона можно записать:

 $2\dot{\mathbf{n}}_{\mathbf{bi}} = \mathbf{n}_{\mathbf{bi}} \otimes \mathbf{m}_{\mathbf{b}}$ ;  $2\dot{\mathbf{n}}_{\mathbf{ni}}^* = -\mathbf{m}_{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{ni}}^*$ ;  $\mathbf{n}_{\mathbf{in}} = \mathbf{n}_{\mathbf{ni}}^*$ , где индексы обозначают соответствующие СК: b—связанная, п— навигационная, і— инерциальная;  $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{\mathbf{x}} & \omega_{\mathbf{y}} & \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$ — кватернион, составленный из вектора угловой скорости;  $\mathbf{m}_{\mathbf{b}}$  и  $\mathbf{m}_{\mathbf{n}}$ — векторы угловой скорости в связанной и навигационной СК соответственно.

Если обозначить кватернион малого поворота от ошибок как  $\Delta \mathbf{n}$ , а вычисленный кватернион поворота как  $\overset{\sim}{\mathbf{n}_{\mathbf{bn}}}$ , то истинный кватернион запишем в виде

$$\mathbf{J}_{\mathbf{bn}} = \mathbf{J}_{\mathbf{J}} \otimes \widetilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{bn}} .$$
(2)

Дифференцируя это выражение с использованием (1) и уравнения Пуассона, можно получить следующее уравнение для кватерниона ошибок

$$2 \dot{\Pi}_{n} = \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} - \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} + \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} - \Pi_{n} \otimes \Pi_{n}^{b}$$
, (3) где  $\Pi_{n} = \tilde{\Pi}_{bn} \otimes \Pi_{bn} \otimes \tilde{\Pi}_{bn}^{*}$ ;  $\Delta \Pi_{b} \cup \Delta \Pi_{n} - \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} = \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} = \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} = \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} = \Pi_{n} \otimes \Pi_{n} \otimes$ 

Ошибки параметров ориентации влияют соответственно на ошибки в выработке скоростей и координат местоположения.

Невозмущенное уравнение для вектора скорости запишем как в [7]:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M}(\mathbf{\pi})\mathbf{w}_b - (\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_n) \times \mathbf{V} + \mathbf{g}(\mathbf{R})$$
, (4) где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости в навигационной СК;  $\mathbf{M}(\mathbf{\pi})$  – матричное преобразование, определяемое кватернионом  $\mathbf{\pi}$ ;  $\mathbf{w}_b$  – вектор кажущегося ускорения в связанной СК (измеренного акселерометрами);  $\mathbf{m}_3$  – угловая скорость вращения земли в навигационной СК.

Возмущенные уравнения от вариаций инструментальных ошибок акселерометров и датчиков вращения запишем

$$\dot{\mathbf{V}} + \Delta \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{J}})(\mathbf{w}_b + \Delta \mathbf{w}_b) - \\ - (\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n) \times (\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) + \mathbf{g}(\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}),$$
 (5)

где  $\Delta \mathbf{w}_{\mathsf{b}}$  – вектор ошибок кажущегося ускорения в связанной СК.

Вычитая возмущенное уравнение из невозмущенного, получим уравнения в вариациях для ошибок скорости

$$\Delta \dot{\mathbf{V}} = -(\mathbf{M}(\Delta \pi) - \mathbf{I})\mathbf{w}_{n} + \Delta \mathbf{w}_{n} - \mathbf{H}(\mathbf{u}_{3} + \mathbf{u}_{n})\Delta \mathbf{V} - \mathbf{H}(\Delta \mathbf{u}_{n})\mathbf{V} - \mathbf{H}(\Delta \mathbf{u}_{n})\Delta \mathbf{V} + \mathbf{g}(\Delta \mathbf{R}),$$
(6)

где  $\mathbf{w}_{n} = \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{n}})\mathbf{w}_{b}$ ;  $\Delta \mathbf{w}_{n} = \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{n}})\Delta \mathbf{w}_{b}$ ;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, соответствующего размера;  $\mathbf{H}(\mathbf{m})$  — кососимметричная матрица, составленная из параметров вектора  $\mathbf{m}$ .

Аналогично получим уравнение в вариациях для ошибок координат местоположения

$$\Delta \dot{\mathbf{R}} = \Delta \mathbf{V} \ . \tag{7}$$

Уравнения (3), (6) - (7) являются нелинейными уравнениями и их можно использовать для построения фильтра Калмана в оценивании ошибок БИНС и компенсации инструментальных ошибок.

## 2. Линеаризация уравнений ошибок БИНС

Как известно, задача оценивания ошибок БИНС не имеет смысла без решения задачи их наблюдаемости [8]. Анализ наблюдаемости проводится на основе линейных уравнений ошибок навигационной системы. Линейную модель можно получить путем линеаризации или разложением в ряд Тейлора уравнений (3), (6) — (7) относительно выбранной рабочей точки [9]. Тогда блочно-матричная форма этих Уравнений примет вид

$$\begin{bmatrix}
\Delta \dot{\mathbf{V}} \\
\Delta \dot{\mathbf{V}} \\
\Delta \dot{\mathbf{R}} \\
\Delta \dot{\mathbf{u}} \\
\Delta \dot{\mathbf{w}}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\mathbf{A}_{V\lambda} & \mathbf{A}_{VV} & \mathbf{A}_{VR} \dots \\
\mathbf{A}_{R\lambda} & \mathbf{A}_{RV} & \mathbf{A}_{RR} \dots \\
\mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\lambda} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}V} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}R} \dots \\
\mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\lambda} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}R} \dots \\
\mathbf{A}_{\lambda\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\lambda\Delta\omega} & \mathbf{A}_{\DeltaW} \\
\mathbf{A}_{R\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{R\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{V\lambda_{d}W} \\
\mathbf{A}_{A\omega_{b}\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{A\omega_{b}\Delta\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{b}\Delta\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\lambda\lambda\omega_{b}} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{d}\Delta\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\lambda\lambda\omega_{d}\omega_{d}W} & \mathbf{A}_{\Delta\omega_{d}\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\lambda\lambda\omega_{d}\omega_{d}W} & \mathbf{A}_{\lambda\omega_{d}\omega_{d}W} \\
\mathbf{A}_{\lambda\omega$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{VR}} = [-\mathbf{H}(\mathbf{V})\mathbf{a}_{\mathrm{R}} + \mathbf{H}(\Delta \mathbf{V})\mathbf{a}_{\mathrm{R}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega_{0}^{2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

 ${f A}_{RV}$  – единичная матрица соответствующей размерности;  ${f A}_{\lambda\Delta w}$ ,  ${f A}_{V\Delta\omega_b}$ ,  ${f A}_{V\Delta w}$ ,  ${f A}_{\Delta\omega_b...}$ ,  ${f A}_{\Delta w...}$ ,  ${f A}_{R\lambda}$ ,  ${f A}_{RR}$ ,  ${f A}_{R\Delta\omega_b}$ ,  ${f A}_{R\Delta w}$  – нулевые матрицы соответствующих размерностей;  ${f M}(\tilde{\bf n})$  – матрица, определяющая взаимную ориентацию связанной и вычисленной навигационной систем координат, составленная из параметров Родрига-Гамильтона:

$$\begin{split} \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{11} &= \widetilde{\lambda}_0^2 + \widetilde{\lambda}_1^2 - \widetilde{\lambda}_2^2 - \widetilde{\lambda}_3^2; \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{12} &= 2(\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_3); \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{13} &= 2(\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2 + \widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_3); \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{21} &= 2(\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_3 + \widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2); \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{22} &= \widetilde{\lambda}_0^2 + \widetilde{\lambda}_2^2 - \widetilde{\lambda}_1^2 - \widetilde{\lambda}_3^2; \quad \mathbf{a}_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & \frac{tg\phi}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{23} &= 2(\widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3 - \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_1); \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{31} &= 2(\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_3 - \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2); \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{32} &= 2(\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3); \\ \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{m}})_{11} &= \widetilde{\lambda}_0^2 + \widetilde{\lambda}_3^2 - \widetilde{\lambda}_1^2 - \widetilde{\lambda}_2^2; \\ \\ \mathbf{a}_R &= \begin{bmatrix} -\omega_3 \sin\phi & -\frac{V_E}{R^2} & 0 \\ \omega_3 \cos\phi + \frac{V_E}{R\cos^2\phi} & -\frac{V_E tg\phi}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{V_N}{R^2} & 0 \end{bmatrix}; \\ \\ \mathbf{a}_{\lambda} &= \begin{bmatrix} 0 & \Delta\lambda_2 & -\Delta\lambda_3 \\ \Delta\lambda_3 & 0 & -\Delta\lambda_1 \\ -\Delta\lambda_2 & \Delta\lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w}_n \dots \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & \Delta\lambda_3 & -\Delta\lambda_2 \\ -\Delta\lambda_2 & 2\Delta\lambda_1 & \Delta\lambda_0 \\ -\Delta\lambda_3 & -\Delta\lambda_0 & 2\Delta\lambda_1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{w}_n) \dots \\ \\ \begin{bmatrix} 2\Delta\lambda_2 & -\Delta\lambda_1 & -\Delta\lambda_0 \\ -\Delta\lambda_1 & 0 & -\Delta\lambda_3 \\ \Delta\lambda_0 & -\Delta\lambda_3 & 2\Delta\lambda_2 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{w}_n) \dots \\ \\ \begin{bmatrix} 2\Delta\lambda_3 & \Delta\lambda_0 & -\Delta\lambda_1 \\ -\Delta\lambda_0 & 2\Delta\lambda_3 & -\Delta\lambda_2 \\ -\Delta\lambda_1 & -\Delta\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{w}_n) \\ \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{w}_n) \dots \end{aligned}$$

Полученные линейные уравнения ошибок БИНС (8) имеют несколько важных отличий от известных уравнений:

1) линеаризация проводилась для ненулевой рабочей точки:

$$\begin{split} \Delta \pi &= \Delta \pi_0 \, ; \ \Delta \mathbf{m}_b = - \mathbf{U}_\omega \, ; \ \Delta \mathbf{w} = - \mathbf{U}_w \, , \\ \Delta \mathbf{V} &= \Delta \mathbf{V}_0 \, ; \ \Delta \mathbf{R} = \Delta \mathbf{R}_0 \, ; \end{split}$$

где  $U_{\omega}, U_{w}$  – сигналы коррекции гироскопов и акселерометров, совпадающие с оценкой ошибок;

- 2) в уравнениях ошибок используются неидеальные параметры вычисляемая матрица перепроектирования  $\mathbf{M}(\mathbf{n})$  и кватернион  $\mathbf{n}$ ;
  - 3) в подматрицу  ${\bf A}_{\lambda\lambda}$  входят дрейфы  $\Delta {\bf m}_b = {\bf U}_\omega \,,$

порядок значений которых для некоторых датчиков выше порядка значений  $\Delta \mathbf{m}_n$ .

Полученную в данном разделе модель ошибок БИНС (8) используем для анализа наблюдаемости инструментальных ошибок.

# 3. Наблюдаемость и обнаруживаемость инструментальных ошибок БИНС

Важным этапом в решении задачи оценки состояния линейной динамической системы, какой являются уравнения ошибок БИНС, считаем анализ наблюдаемости динамической системы. В работе [10] подробно описаны условия наблюдаемости и обнаруживаемости линейных динамических систем. В соответствии с этими условиями проведем анализ наблюдаемости ошибок БИНС (8) с последующим анализом обнаруживаемости с использованием различных моделей инструментальных ошибок.

Приведем следующие полученные результаты:

1. При расширении модели ошибок инструментальными ошибками гироскопов и акселерометров типа констант

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}(t) = 0, \Delta \dot{\mathbf{w}}(t) = 0,$$

ранг матрицы наблюдаемости уменьшается

$$\operatorname{rank} \left[ C^{T} \quad A^{T} C^{T} \quad (A^{T})^{2} C^{T} \quad \dots (A^{T})^{15} C^{T} \right] = 15 < n,$$
 где  $n = 16$ .

Это свидетельствует о неполной наблюдаемости ошибок. Наблюдаемость инструментальных ошибок только гироскопов или только акселерометров выполняется. Проверка обнаруживаемости показала, что ранг матрицы наблюдаемости структурно преобразованной системы равен рангу исходной матрицы наблюдаемости

$$\operatorname{rank} \left[ \overline{C_l}^T \ \overline{A_{11}}^T \overline{C_l}^T \ (\overline{A_{11}}^T)^2 \overline{C_l}^T \ ... (\overline{A_{11}}^T)^{14} \overline{C_l}^T \right] = 15,$$
 но ненаблюдаемая подсистема имеет нулевые собственные значения. В преобразованной к новому базису системе (8) выделилась часть размерности  $v_2 = 15$ , которая наблюдаема по выходу  $y(t)$  и ненаблюдаемая часть, в которую вошла компонента

2. Представление инструментальных ошибок БИНС моделями типа констант является приближенным. Для более точного описания применены модели типа винеровских процессов первого порядка:

вектора инструментальных ошибок БИНС  $\Delta w_Z$ .

$$\begin{split} \Delta \dot{\boldsymbol{m}}(t) &= \alpha_{\boldsymbol{\omega}} \Delta \boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\omega}}; \\ \Delta \dot{\boldsymbol{w}}(t) &= \alpha_{\boldsymbol{w}} \Delta \boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{w}}, \end{split}$$

где  $\xi_{\omega}, \xi_{W}$  – «белошумные» составляющие.

При таком расширении инструментальными моделями ошибок БИНС ошибки полностью на-

блюдаемы, и они остаются наблюдаемыми даже при отсутствии измерений в азимутальном канале.

#### Заключение

Полученные в работе уравнения ошибок БИНС имеют кватернионную форму и обладают рядом особенностей, отличающих их от известных уравнений ошибок. Данные уравнения применимы для широкого диапазона инструментальных ошибок инерциальных датчиков, что позволит использовать их для БИНС с низкоточными датчиками и повысить точность систем навигации с такими датчиками.

Проведенный анализ наблюдаемости инструментальных ошибок БИНС с последующим анализом их обнаруживаемости (в случае невыполнения условия полной наблюдаемости), позволяет делать выводы о возможности оценивания как наблюдаемых, так и не наблюдаемых состояний модели ошибок навигационной системы. Это позволит решить задачу коррекции инструментальных ошибок БИНС и повысить точность определения навигационных параметров.

### Список литературы

1. Степанов О.А. Особенности построения и перспективы развития навигационных инерциально-спутниковых систем // Интегрированные инерциально-спутниковые системы: Сб. научн. тр. — С.-Пб., 2004. — С. 25-43.

- 2. Бабич О.А. Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991. 512 с.
- 3. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной навигации. К.: Наук. думка, 1995. 278 с.
- 4. Парусников Н.А., Морозов В.Н., Борзов В.И, Задача коррекции в инерциальной навигации. — М.: МГУ, 1982. — 176 с.
- 5. Петров Б.Н. Избранные труды. Теория автоматического управления. Т. 1. М.: Наука, 1983. 432 с.
- 6 Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
- 7. Анучин О.Н., Емельянцев Г.И. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 389 с.
- 8. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Информационноалгоритмические аспекты управления подвижными объектами. – К.: Наук. думка, 2000. – 310 с.
- 9. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 366 с.
- 10. Кортунов В.И., Проскура Г.А. Наблюдаемость и обнаруживаемость инструментальных ошибок бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Авиационно-космическая техника и технология. 2006.  $N_2$  3 (29). С. 31-38.

Поступила в редколлегию 5.10.2006

**Рецензент**: д-р техн. наук, проф. В.К. Волосюк, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.