УДК 519.27

Е.И. Суворова, О.В. Серая

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СВЯЗИ «ФАКТОРЫ-ОТКЛИК» В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ ВЫБОРКИ НАБЛЮДЕНИЙ

В статье предлагается методика установления зависимости значений некоторого определяющего параметра исследуемой сложной системы или процесса от предположительно влияющих факторов, в ситуации, когда общее число опытов недостаточно для построения адекватной модели. Методика основана на преобразовании пассивного эксперимента в активный с последующим формированием репликоподобного ортогонального представительного подплана, который позволяет осуществить отсеивание малозначимых факторов и взаимодействий, упрощая структуру оцениваемого уравнения регрессии.

фактор, эксперимент, репликоподобный ортогональный представительный подплан

Введение

Постановка задачи. При исследовании множества разнообразных сложных систем и процессов в технике, экономике, военном деле, социологии, медицине и т.д. возникает типовая задача установления связи между некоторым важным для результатов исследования параметром и совокупностью факторов, предположительно влияющих на этот параметр. Так, например, очень важно диагностировать техническое состояние (ТС) объекта эксплуатации (ОЭ) в некоторый момент времени, то есть определить значения показателей, которыми характеризуется данная система в текущий момент времени. Задача прогнозирования технического состояния ОЭ на некоторый произвольный момент времени по существу отличается от задачи его оценки тем, что требует определения показателей технического состояния как функции времени и условий эксплуатации. В связи с тем, что условия и продолжительность эксплуатации различных систем могут существенно отличаться друг от друга, соответствующие отличия будут иметь и зависимости, описывающие эволюцию во времени показателей ТС. По этой причине статистические данные об отказах различных ОЭ, вообще говоря, не могут расцениваться как выборки из одной и той же генеральной совокупности. При этом использование традиционных методов статистической обработки результатов контроля технического состояния, ориентированных на однородные выборки, приводит к необходимости формирования групп объектов контроля, режимы и условия эксплуатации которых одинаковы, то есть к дроблению исходного статистического материала. Точность оценивания показателей ТС вследствие этого, естественно уменьшается и, таким образом, чем более индивидуализированным по режимам и условиям эксплуатации является прогноз ТС, тем хуже его качество. Возникающее в связи с этим диалектическое противоречие с использованием традиционных подходов разрешено быть не может.

Существо предлагаемой ниже методики индивидуального прогнозирования показателей ТС систем состоит в отказе от последовательной групповой обработки однородных выборок и в переходе к совместной обработке данных о результатах контроля не отдельных групп, а всех ОЭ независимо от условий и режимов их эксплуатации, но с учетом различий между ними.

Цель статьи – разработка методики определения зависимости некоторого определяющего параметра исследуемой сложной системы от предположительно влияющих факторов, в ситуации, когда общее число опытов недостаточно для построения адекватной модели**.**

Основной материал

Традиционно связь между некоторым важным для результатов исследования параметром y и совокупностью факторов $(F_1, F_2, ..., F_m)$, предположительно влияющих на этот параметр, описывают с использованием регрессионного полинома Колмогорова – Габора

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i F_i + \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2>i_1}^{m} a_{i_1 i_2} F_{i_1} F_{i_2} + ... + a_{12...r} F_1 F_2 ... F_m. \quad (1)$$

Для отыскания неизвестных коэффициентов в (1) используют результаты непосредственных измерений значений факторов $F_1, F_2, ..., F_r$ и определяющего параметра y в ряде опытов. При этом формируют матрицу H и векторы A, Y:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & F_{11} & F_{12} & ... & F_{1m} & F_{11}F_{12} & ... & F_{11}F_{12}...F_{1m} \\ 1 & F_{21} & F_{21} & ... & F_{2m} & F_{21}F_{22} & ... & F_{21}F_{22}...F_{2m} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & F_{n1} & F_{n2} & ... & F_{nm} & F_{n1}F_{n2} & ... & F_{n1}F_{n2}...F_{nm} \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_r & a_{12} & \dots & a_{123\dots r} \end{pmatrix}; \\ Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где F_{ji} – значение i-го фактора в j-м эксперименте; y_j – результат измерения определяющего фактора в j-м эксперименте, I = 1, 2, … , m, j = 1, 2, … , n.

Далее искомый вектор оценивается по методу наименьших квадратов (МНК). При этом функционал наименьших квадратов имеет вид

$$J = (HA - Y)^T (HA - Y)\,, \qquad (3)$$

а минимизирующий (3) вектор рассчитывается по формуле

$$A = (H^T H)^{-1} H^T Y\,. \qquad (4)$$

Как известно [1],приведенная схема хорошо работает, если количество экспериментов n надлежащим образом (приблизительно на порядок) превышает число оцениваемых компонентов уравнения регрессии (1). Ухудшение соотношения между числом оцениваемых коэффициентов и числом опытов приводит к негативным последствиям по следующим причинам. Во-первых, возрастают дисперсии оценки значений элементов вектора A, лежащие на главной диагонали ковариационной матрицы ошибок оценок

$$K = \sigma_0^2 (H^T H)^{-1}\,,$$

где σ_0^2 – дисперсия измерения результирующего параметра y. Во-вторых, при этом уменьшается число степеней свободы, равное разности между числом экспериментов и числом оцениваемых параметров, что приводит к расширению доверительных интервалов, накрывающих истинные значения коэффициентов уравнения регрессии. Следствием этого является увеличение вероятности принять гипотезу о незначимости факторов, для которых рассчитанные доверительные интервалы захватывают ноль. Таким образом, совокупное действие указанных причин, в условиях дефицита исходных данных, снижает адекватность модели (1).

Улучшение ситуации возможно либо при увеличении числа опытов, что на практике далеко не всегда может быть реализовано, либо за счет уменьшения числа оцениваемых параметров модели. При этом шаблонное снижение размерности вектора путем упрощения модели едва ли приемлемо. Более перспективные возможности возникают при использовании искусственной ортогонализации [2] результатов пассивного эксперимента, задаваемого матрицей (2).

Целью искусственной ортогонализации пассивного эксперимента является преобразование этого эксперимента в активный без существенной потери в точности. При этом сначала проводится масштабирование (нормировка) реальных измерений факторов к интервалу [–1;1] по формулам

$$X_{ji} = \frac{2F_{ji} - (F_{i\,max} + F_{i\,min})}{F_{i\,max} - F_{i\,min}}, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n;$$

$$F_{i\,max} = \max_j F_{ji}; \quad F_{i\,min} = \min_j F_{ji}.$$

Далее в m-мерном пространстве факторов формируется гиперкуб с центром в начале координат и длиной ребер, равной двум. Вершинам этого гиперкуба соответствует план полного факторного эксперимента. Теперь все множество результатов пассивного эксперимента разбивается на 2^m подмножеств $(E_1, E_2, \dots, E_N)$ по правилу

$$E_e = \left\{ j : \underbrace{\min_s (X_s^0 - X_j)^T (X_s^0 - X_j) =}_{=(X_e^0 - X_j)^T (X_e^0 - X_j)} \right\},$$

где $X_j = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{ji}, \dots, X_{jm})$ – j-ая точка в нормированном пространстве факторов, j = 1, 2, … , n; X_s^0 – s-ая вершина гиперкуба, s = 1, 2, … , N.

Точки, попавшие в каждое подмножество, используются для приближенного описания функции отклика в пределах соответствующего гиперквадрата с помощью линейного по факторам уравнения регрессии

$$y_e = b_{e0} + b_{e1}F_1 + b_{e2}F_2 + \dots + b_{em}F_m\,, \qquad (5)$$

параметры которого рассчитываются по формуле

$$B_e = \left(H_e^T H_e\right)^{-1} H_e^T Y_e\,; \qquad (6)$$

$$H_e = \begin{pmatrix} 1 & F_{j_1 1} & F_{j_1 2} & \dots & F_{j_1 m} \\ 1 & F_{j_2 1} & F_{j_2 2} & \dots & F_{j_2 m} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & F_{j_{n_e} 1} & F_{j_{n_t} 2} & \dots & F_{j_{n_e} m} \end{pmatrix};$$

$$B_e = \begin{pmatrix} b_{e0} \\ b_{et1} \\ \dots \\ b_{em} \end{pmatrix}; \quad Y_e = \begin{pmatrix} y_{j1} \\ y_{y2} \\ \dots \\ y_{jn_t} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Применив процедуру (5) – (7) ко всем гиперквадратам пространства факторов, получим кусочно-линейное описание функции отклика, составленное из гиперплоскостей. Наконец, рассчитываются значения функции отклика в точках, соответствующих вершинам гиперкуба. Совокупность этих значений образует план активного ортогонализованного полного факторного эксперимента (ОПФЭ). Принципиальное достоинство полученного ОПФЭ состоит в возможности независимого оценивания параметров уравнения регрессии (1), что позволяет удалить из модели все малозначимые факторы и взаимодействия, упрощая его структуру. В дальнейшем оценивание оставшихся регрессионных коэффициентов осуществляется по МНК с использованием всех измерений.

Так как в некоторые гиперкубы может попасть мало точек, а в некоторых из них точек может не быть совсем, то ПФЭ перестанет быть полным и ортогональным. Естественный путь преодоления возникающих при этом трудностей состоит в попытке использования дробных реплик, что на практике трудно реализуемо. Другой путь состоит в построении репликоподобного симметричного относительно центра эксперимента ортогонального плана, который может быть получен в результате решения триаксиальной булевой задачи назначения. При этом используется метод нормирующего преобразования для матрицы коэффициентов целевой функции, реализуемый следующим образом.

Вся совокупность факторов разбивается на три подмножества $\{A,B,C\}$ по p факторов в каждом:

$$A = \{F_1, F_2, ..., F_p\}; \quad B = \{F_{p+1}, F_{p+2}, ..., F_{2p}\};$$
$$C = \{F_{2p+1}, F_{2p+2}, ..., F_{3p}\}.$$

Для дальнейшего применения удобно ввести независимую нумерацию факторов в подмножествах. Пусть

$$F_e^A = F_e; \; F_e^B = F_{p+e}; \; F_e^C = F_{2p+e}, \; e = 1,2,...,p.$$

Формируется ортогональный полный m-факторный план. Общее число экспериментов плана равно 2^m, а количество экспериментов, соответствующих всем возможным комбинациям уровней для факторов, входящих в любое из подмножеств, равно 2^p. Пронумеруем эти комбинации для факторов F_e^A, $e = 1,2,...,p$, индексом i_1, а для факторов подмножеств F_e^B, $e = 1,2,...,p$, и F_e^C, $e = 1,2,...,p$, соответственно индексами i_2 и i_3. Тогда любой строке плана может быть поставлена во взаимнооднозначное соответствие тройка $(i_1 \; i_2 \; i_3)$. При этом ортогональный полный m-факторный план будет иметь вид:

N п/п	i_1	i_2	i_3	F_1^A	F_2^A	…	F_p^A	F_1^B	…	F_p^C
1	1	1	1	–	–	…	–	–	…	–
2	1	1	2	–	–	…	–	–	…	+
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^p	1	1	2^p	–	–	…	–	–	…	+
2^p+1	1	2	1	–	–	…	–	–	…	–
2^p+2	1	2	2	–	–	…	–	–	….	+
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^{2p}	1	2^p	2^p	–	–	…	–	+	…	+
$2^{2p}+1$	2	1	1	–	–	…	+	–	…	–
$2^{2p}+2$	2	1	2	–	–	…	+	–	…	+
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^{3p}	2^p	2^p	2^p	+	+	…	+	+	…	+

Множество комбинаций индексов $(i_1 \; i_2 \; i_3)$ может быть представлено в виде трехмерной решетки с 2^p узлами по каждой из трех координат.

Введем параметр

$$Z_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} 1, \text{если строка } (i_1, i_2, i_3) \\ \qquad \text{включена в эксперимент;} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Понятно, что набор значений $\{Z_{i_1 i_2 i_3}\}$ однозначно определяет некоторый план эксперимента, содержащий число строк, равное числу единиц в наборе. Сформируем систему уравнений

$$\sum_{i_3=1}^{2^p} Z_{i_1 i_2 i_3} = 1, \quad i_1 = 1,2,\dots,2^p, \; i_2 = 1,2,\dots,2^p; \quad (8)$$

$$\sum_{i_2=1}^{2^p} Z_{i_1 i_2 i_3} = 1, \quad i_1 = 1,2,\dots,2^p, \; i_3 = 1,2,\dots,2^p; \quad (9)$$

$$\sum_{i_1=1}^{2^p} Z_{i_1 i_2 i_3} = 1, \quad i_2 = 1,2,\dots,2^p, \; i_3 = 1,2,\dots,2^p. \quad (10)$$

Справедлива следующая теорема. Любое решение системы уравнений (8) – (10) определяет симметричный ортогональный план эксперимента с числом строк, равным 2^{2p} [3].

Из множества возможных решений выбирается то, которому соответствует наиболее представительный план. Для этого вводится критерий представительности плана. Каждой строке полного факторного эксперимента соответствует значение функции отклика $y_{i_1 i_2 i_3}$, оцененное с использованием методики искусственной ортогонализации (5) – (7), и дисперсия этого значения – $\sigma^2_{i_1 i_2 i_3}$. Тогда

$$\Phi = \sum_{i_1}^{2^p} \sum_{i_2}^{2^p} \sum_{i_3}^{2^p} \sigma^2_{i_1 i_2 i_3} Z_{i_1 i_2 i_3} \quad (11)$$

определяет суммарную дисперсию эксперимента. Далее решается задача выбора набора $\{Z_{i_1 i_2 i_3}\}$, удовлетворяющего (8) – (10) и минимизирующего дисперсию (11). Полученная задача является триаксиальной булевой задачей назначения. Технология ее решения описана в [4].

Следует отметить, что результаты всех реальных опытов, не вошедших в отобранные для усеченного плана гиперквадраты, могут и должны быть использованы. Соответствующие точки присоединяются к выделенным подмножествам по правилу (5) – (7).

Выводы

Разработана методика определения зависимости определяющего параметра исследуемой сложной системы от предположительно влияющих факторов, в ситуации, когда общее число опытов недостаточно для построения адекватной модели**.** Преобразование пассивного эксперимента в активный с последующим формированием репликоподобного ортогонального представительного подплана позволяет осуществить отсеивание малозначимых факторов и взаимодействий, упрощая структуру оцениваемого уравнения регрессии. Получаемая при этом модель доступна для анализа. Эффективность подхода подтверждена многочисленными примерами обработки реальных данных.

Список литературы

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 456 с.

2. Раскин Л.Г., Костенко Ю.Т. Прогнозирование технического состояния систем управления. – Х.: Основа, 1996. – 303 с.

3. Раскин Л.Г., Серая О.В., Лолашвили Б.Г. Планирование эксперимента // ИУСЖТ. – 2004. – № 3. – С. 40-43.

4. Раскин Л.Г., Кириченко Н.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.

Поступила в редколлегию 12.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.