УДК 514.753

И.В. Гребенник[1], Т.Е. Романова[2], С.Б. Шеховцов[3]

[1]Харьковский национальный университет радиоэлектроники
[2]Институт проблем машиностроения им. А.Н Подгорного НАН Украины
[3]Харьковский национальный университет внутренних дел

# ОЦЕНКА И РАНЖИРОВАНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

*Рассматривается задача многокритериального выбора решения в условиях неопределенности в геометрическом проектировании с использованием элементов теории интервального анализа.*

***принятие решений, условие неопределенности, интервальная многофакторная оценка***

## Введение

Одной из проблем, возникающих в геометрическом проектировании, является проблема создания интеллектуальных систем для эффективного решения оптимизационных задач упаковки, раскроя и покрытия [1].

Необходимость учета погрешностей метрических характеристик и параметров размещения геометрических объектов при математическом моделировании, наличие неопределенностей исходных данных приводят к необходимости разработки конструктивных средств выбора наилучшего решения.

Как правило, такой выбор осуществляется на основании нескольких критериев в условиях неопределенности относительно важности тех или иных характеристик принимаемого решения. Проблема многокритериального выбора решения в условиях неопределенности может быть решена различными способами, например, приведенными в работах [2, 3].

В данном исследовании для выбора решений в условиях неопределенности используются элементы теории интервального анализа в геометрическом проектировании [4].

## Постановка задачи

Основной проблемой теории принятия решений [2, 5] является построение модели многофакторного оценивания допустимых альтернатив, которая состоит в следующем.

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – множество допустимых альтернатив, $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ – множество разнородных частных критериев, характеризующих альтернативы.

**Задача**. Необходимо построить обобщенную многофакторную интервальную оценку полезности альтернатив $x \in X$ вида

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{G}(\boldsymbol{\Lambda},\ K). \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}=\{\langle A_i \rangle, i \in J_n=\{1,2,\ldots,n\}\}$ – множество интервальных коэффициентов, выполняющих функцию приведения разнородных частных критериев к одной размерности, одинаковому интервалу возможных значений и учитывающие их относительную важность, $\langle A_i \rangle \in \mathbf{I_s R}$, $\mathbf{I_s R}$ – пространство центрированных интервалов [4], $\mathbf{G}$ – некоторое интервальное отображение вида $\mathbf{G}:(\boldsymbol{\Lambda}\times K)\to \mathbf{I_s R}$.

**Целью** исследования является построение отображения $\mathbf{G}$ в аналитическом виде, т.е. получение оценки, позволяющей установить отношение предпочтения на множестве альтернатив.

## Идеализированная математическая модель

Построение оценки (1) в случае, когда $\langle A_i \rangle = \langle a_i, 0 \rangle \equiv a_i \in R^1$ сводится к реализации идеализированной математической модели $P(x)=G(\Lambda,\ K)$.

Построение математической модели поставленной задачи связано с решением двух взаимосвязанных задач структурной и параметрической идентификации.

Эффективным средством решения задачи структурной идентификации в идеализированном случае являются функции обобщенной полезности, основанные на гипотезе аддитивности локальных полезностей частных критериев вида [5]:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(k_i(x)); \qquad (2)$$

$$\overline{P}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{p}_i(k_i(x)), \qquad (3)$$

где $p_i(k_i(x))$ – функция полезности частных критериев, которые удовлетворяют требованиям безразмерности, одинакового интервала изменения и инвариантности к виду экстремума; $\overline{p}_i(k_i(x))=1-p_i(k_i(x))$ – функция потери полезности; $\alpha_i$ – безразмерные коэффициенты относительной важности частных критериев, удовлетворяющие условиям:

$$0 \le a_i \le 1, \; i \in J_n, \; \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \qquad (4)$$

Как показано в [6], для определения значений коэффициентов $\alpha_i$ не представляется возможным использовать традиционные методы параметрической идентификации, например, метод наименьших квадратов. Значения $\alpha_i$ наиболее адекватно могут быть интерпретированы как интервалы возможных значений параметров моделей (2), (3) с заданием на них более или менее определенных предпочтений. При этом в силу особенностей методов идентификации в большинстве случаев определить предпочтения внутри интервалов невозможно. В этих условиях необходимо решить задачу многофакторного оценивания и ранжирования альтернатив. Традиционно эта задача решается путем определения по исходной интервальной информации точечных оценок тем или иным методом [6].

## Интервальная математическая модель

Методы интервального анализа позволяют оценивать и ранжировать альтернативы непосредственно на основе информации о предпочтительности частных критериев, заданной в интервальном виде.

Пусть важность каждого частного критерия $k_i(x)$ определяется интервалом вида $\alpha_i = [\alpha_{i_{min}}, \alpha_{i_{max}}]$. Исследуем случай, когда внутри интервала $\alpha_i$ предпочтения не определены.

Представим математическую модель задачи (1) аналогично (2) – (4).

Пусть для интервалов $\alpha_i$ выполняется соотношение

$$\alpha_i = [\alpha_{i_{min}}, \alpha_{i_{max}}], \; i \in J_n. \qquad (5)$$

Каждому интервалу вида (5) поставим в соответствие центрированный интервал $\langle A_i \rangle = \langle a_i, \nu_{a_i} \rangle \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$, [4] следующим образом:

$$\langle A_i \rangle \Leftrightarrow [a_i - \nu_{a_i}, a_i - \nu_{a_i}] = [\alpha_{i_{min}}, \alpha_{i_{max}}], \qquad (6)$$

где $a_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{min}} + \alpha_{i_{max}})$, $\nu_{a_i} = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{max}} - \alpha_{i_{min}})$.

Множеству интервальных коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ – элемент пространства $\mathbf{I_s^n R} = \underbrace{\mathbf{I_s R} \times ... \times \mathbf{I_s R}}_{n}$ [7] вида

$$A = (\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, ..., \langle A_n \rangle) \in \mathbf{I_s^n R}.$$

В пространствах $\mathbf{I_s R}$, $\mathbf{I_s^n R}$ определены операции сложения и умножения на число $\lambda \in R^1$ [4, 7]:

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, \nu_x + \nu_y \rangle;$$

$$\lambda \langle X \rangle = \begin{cases} \langle \lambda x, \lambda \nu_x \rangle, & \text{если } \lambda > 0; \\ \langle \lambda x, |\lambda| \nu_x \rangle, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$$

где

$$\langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_s R}; \; \langle Y \rangle = \langle y, \nu_y \rangle \in \mathbf{I_s R};$$

$$X + Y = (\langle X_1 \rangle + \langle Y_1 \rangle, \langle X_2 \rangle + \langle Y_2 \rangle, ..., \langle X_n \rangle + \langle Y_n \rangle);$$

$$\lambda X = (\lambda \langle X_1 \rangle, \lambda \langle X_2 \rangle, ..., \lambda \langle X_n \rangle),$$

где

$$X = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, ..., \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I_s^n R};$$

$$Y = (\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle, ..., \langle Y_n \rangle) \in \mathbf{I_s^n R}.$$

Заметим, что в модели (1) значения $p_i(k_i(x))$, $\overline{p}_i(k_i(x))$ являются действительными числами, а значения коэффициентов относительной важности частных критериев – элементами интервального пространства $\mathbf{I_s R}$. В соответствии с аддитивной моделью (2), (3) и операциями сложения и умножения на действительное число, введенными в пространстве $\mathbf{I_s R}$, для каждой альтернативы $x \in X$ сформируем интервальные многофакторные оценки $\mathbf{P}(x, A)$ и $\tilde{\mathbf{P}}(x, A)$.

В соответствии с моделью (2), (3) требуется выполнение условий, аналогичных (4), накладываемых на интервальные коэффициенты $\langle A_i \rangle$, $i \in J_n$.

С этой целью осуществим нормализацию коэффициентов $\langle A_i \rangle$ по формуле $\langle A_i^н \rangle = \sigma^н \cdot \langle A_i \rangle$, $i \in J_n$, где $\sigma^н = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle}$.

Воспользуемся формулами интервального умножения, введенными в пространстве $\mathbf{I_s R}$ [4]

Пусть $\langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I_s R}$. Интервальное произведение $\langle Y \rangle * \langle X \rangle$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle = \langle xy + \nu_x \nu_y, y\nu_x + x\nu_y \rangle, \\ \text{если } \langle Y \rangle, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1}; \\ \overline{\langle Y \rangle} \cdot \langle X \rangle = \langle xy - \nu_x \nu_y, y\nu_x - x\nu_y \rangle, \\ \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1}; \\ \langle y + s|\nu_y|, 0 \rangle \cdot \langle X \rangle = \langle x(y + s|\nu_y|), \nu_x (y + s|\nu_y|) \rangle, \\ \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1}; \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu_x \ge 0, \nu_y \ge 0 \text{ или } \nu_x < 0, \nu_y < 0; \\ -1, & \text{если } \nu_x \ge 0, \nu_y \le 0 \text{ или } \nu_x < 0, \nu_y > 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{I}_{s1}$ – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I_s R}$, которые удовлетворяют неравенству $x - |\nu_x| > 0$; $\mathbf{I}_{s2}$ – множество точек $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, которые удовлетворяют неравенству $x+|v_x|<0$; $\mathbf{I}_{s3}$ – множество точек $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$x-|v_x|\le 0,\ \text{если } x\ge 0;$$
$$x+|v_x|\ge 0,\ \text{если } x\le 0.$$

$\langle A\rangle\cdot\langle B\rangle$ – есть операция, соответствующая операция гиперболического умножения двух интервалов $A$ и $B$.

Воспользовавшись формулой интервального деления [4], имеем

$$\left\langle A_i^{н}\right\rangle = \frac{\langle A_i\rangle}{\sum\limits_{i=1}^{n}\langle A_i\rangle} = \frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\langle A_i\rangle * \langle B\rangle, \tag{7}$$

$|b|\ne|\nu_b|$.

Поскольку $a-|\nu_a|>0$, то согласно таблице умножения интервальных чисел, формула (7) примет следующий вид:

$$\left\langle A_i^{н}\right\rangle = \frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\left\langle a_i b+\nu_{a_i}\nu_b,\, b\nu_{a_i}+a_i\nu_b\right\rangle,$$

где $\langle B\rangle = \langle b,\nu_b\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle A_i\rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} a_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right\rangle$.

Следовательно,

$$\left\langle A_i^{н}\right\rangle = \left\langle a_i^{н}, \nu_i^{н}\right\rangle, \tag{8}$$

где

$$a_i^{н} = \frac{a_i\sum\limits_{i=1}^{n}a_i + \nu_{a_i}\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2};$$

$$\nu_i^{н} = \frac{\nu_{a_i}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i + a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}.$$

Учитывая (8), определим сумму коэффициентов $\left\langle A_i^{н}\right\rangle$, $i\in J_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{н}\right\rangle = \left\langle a^{н},\nu_a^{н}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{\langle A_i\rangle}{\langle B\rangle} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle A_i\rangle}{\langle B\rangle} = \frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\langle a_i b+\nu_{a_i}\nu_b,\, b\nu_{a_i}+a_i\nu_b\right\rangle =$$

$$=\frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\left\langle b\sum_{i=1}^{n}a_i+\nu_b\sum_{i=1}^{n}\nu_{a_i},\, b\sum_{i=1}^{n}\nu_{a_i}+\nu_b\sum_{i=1}^{n}a_i\right\rangle =$$

$$=\left\langle \frac{b^2+\nu_b^2}{b^2-\nu_b^2}, \frac{2b\nu_b}{b^2-\nu_b^2}\right\rangle =$$

$$=\left\langle \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}, \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}\right\rangle;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{н}\right\rangle = \left\langle a^{н},\nu_a^{н}\right\rangle; \tag{9}$$

$$\langle 0,0\rangle \le \left\langle A_i^{н}\right\rangle \le \left\langle a^{н},\nu_a^{н}\right\rangle.$$

*Замечание.* Если положить все $\nu_{a_i}$ равными нулю, то условие (9) будет эквивалентно выражению (4).

Тогда соотношения (7), (8) примут вид

$$\mathbf{P}(x, A^{н}) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{н}\right\rangle\cdot p_i(k_i(x)); \tag{10}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(x, A^{н}) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{н}\right\rangle\cdot \overline{p}_i(k_i(x)), \tag{11}$$

где $A^{н} = (\left\langle A_1^{н}\right\rangle, \left\langle A_2^{н}\right\rangle, \ldots, \left\langle A_n^{н}\right\rangle) \in \mathbf{I_s^n R}$.

Таким образом, отображение $\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K)$ примет вид

$$\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{н}\right\rangle\cdot p_i(k_i(x)); \tag{12}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{н}\right\rangle\cdot \overline{p}_i(k_i(x)). \tag{13}$$

Другими словами, согласно (10), (11) каждому решению $x\in X$ поставим в соответствие интервальные многофакторные оценки полезности или потери полезности.

Пусть

$$\left\langle P_j\right\rangle = \mathbf{P}(x_j, A);\ X_{\mathbf{P}} = \{\left\langle P_1\right\rangle, \ldots, \left\langle P_m\right\rangle\};$$

$$\left\langle \tilde{P}_j\right\rangle = \tilde{\mathbf{P}}(x_j, A);\ X_{\tilde{\mathbf{P}}} = \{\left\langle \tilde{P}_1\right\rangle, \ldots, \left\langle \tilde{P}_m\right\rangle\},\ j\in J_m.$$

Рассмотрим задачу выбора решения из множества $X$ на основе интервальных оценок обобщенной полезности (10) или интервальных оценок обобщенной потери полезности (11). Далее, ориентируясь на решение задачи минимизации, будем выбирать решение из множества $X$ с помощью интервальных многофакторных оценок обобщенной потери полезности (11).

С этой целью необходимо решить задачу вида

$$\tilde{\mathbf{P}}(x, A) \to \min_{x\in X}. \tag{14}$$

Минимум будем понимать в смысле отношения предпочтения $\succ$ [8], которое зададим на множестве $X_{\tilde{\mathbf{P}}}$ следующим образом.

Пусть $\langle A\rangle = \langle a,\nu_a\rangle \in X_{\tilde{\mathbf{P}}}$, $\langle B\rangle = \langle b,\nu_b\rangle \in X_{\tilde{\mathbf{P}}}$, причем $\langle A\rangle \underset{i}{\subseteq} \langle B\rangle$:

$$\langle A\rangle \underset{i}{\subseteq} \langle B\rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(b-\nu_b \le a-\nu_a\right) \wedge \left(a+\nu_a \le b+\nu_b\right), \qquad (15)$$

где $\quad I_sR = \left\{\langle u, \nu_u\rangle \in \mathbf{I_s R} \mid \nu_u \ge 0\right\}$;

$$\langle A\rangle \in I_sR;$$
$$\langle B\rangle \in I_sR.$$

Учитывая (15), на множестве интервальных оценок введем отношение предпочтения

$$\langle A\rangle \succ \langle B\rangle \qquad (16)$$

следующим образом.

Полагаем, что если выполняется соотношение $\langle A\rangle \underset{i}{\subseteq} \langle B\rangle$, то $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle$, т.е. $\langle A\rangle$ предпочтительнее $\langle B\rangle$.

В случае, когда $\langle A\rangle \underset{i}{\not\subset} \langle B\rangle$, $\langle B\rangle \underset{i}{\not\subset} \langle A\rangle$ и $\langle A\rangle \cap_i \langle B\rangle \ne \varnothing$, полагаем:

если

$$\begin{cases} a \ge b, \\ \nu_a \ge \nu_b \end{cases},$$

то $\langle B\rangle \succ \langle A\rangle$;

если

$$\begin{cases} a \ge b, \\ \nu_a \le \nu_b \end{cases},$$

то $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle$.

Здесь $\langle A\rangle \cap_i \langle B\rangle \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда интервалы $\left[a-\nu_a, a+\nu_a\right]$ и $\left[b-\nu_b, b+\nu_b\right]$ имеют общие точки.

Если

$$\begin{cases} a \le b; \\ \nu_a \le \nu_b, \end{cases}$$

то полагаем $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle$;

если

$$\begin{cases} a \le b; \\ \nu_a \ge \nu_b, \end{cases}$$

то полагаем $\langle B\rangle \succ \langle A\rangle$.

В том случае, когда $\langle A\rangle \cap_i \langle B\rangle = \varnothing$, полагаем, что $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle \Leftrightarrow \langle A\rangle < \langle B\rangle$, где $<$ – отношение порядка в $\mathbf{I_s R}$ [4]:

$$\langle A\rangle < \langle B\rangle \Leftrightarrow \left(a<b\right) \vee \left(a=b\right) \wedge \left(\nu_a \le \nu_b\right).$$

Используя введенное отношение предпочтения на множестве $X_{\tilde{\mathbf{P}}}$, путем попарных сравнений определим наиболее предпочтительный элемент $\left\langle \tilde{P}_j^0 \right\rangle \in X_{\tilde{\mathbf{P}}}$ и соответствующее ему решение $x^0 \in X$.

## Выводы

Построение многофакторной оценки допустимых альтернатив в условиях неопределенности можно представить в виде интервального отображения (12) или (13).

Ранжирование альтернатив в условиях неопределенности можно реализовать, используя отношение предпочтения (16), заданное на множестве многофакторных интервальных оценок. Кроме того, при нулевых значениях радиусов интервальных коэффициентов предпочтений построенная в работе интервальная математическая модель сводится к идеализированной модели (2) – (4).

Результаты исследований, представленные в данной работе, могут быть использованы при разработке систем поддержки принятия решений, ориентированных на оптимизацию размещения геометрических объектов с целью рационального учета погрешностей исходных данных.

## Список литературы

*1. Dyckhoff, G. Scheithauer, and J. Terno. Cutting and packing. In M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello, editors, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, chapter 22, P. 393-412. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.*

*2. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь,1981. – 340 с.*

*3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.*

*4. Стоян Ю.Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23-25.*

*5. Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – К.: Наук. думка, 2002. – 164 с.*

*6. Овезгельдыев А.О., Петров К.Э. Оценка и ранжирование альтернатив в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 5. – С. 148-153.*

*7. Романова Т.Е. Интервальное пространство* $\mathbf{I_s^n R}$. *Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 2000. – № 9. – С. 36-41.*

*8. Гребенник И.В., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б. Параметрический анализ некоторых оптимизационных задач геометрического проектирования // Искусств. интеллект. – 2003. – № 3. – С. 329-337.*

*Поступила в редколлегию 16.02.2007*

**Рецензент**: д-р физ.-мат. наук, проф. С.В. Яковлев, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков.