

УДК 623.021 : 005

В.Б. Кононов

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВА ОДНОРОДНЫХ И РАЗНОРОДНЫХ СИЛ И СРЕДСТВ КОНФЛИКТУЮЩИХ ГРУППИРОВОК НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье изложено формализованное описание задач определения оптимального состава однородных и разнородных боевых средств противоборствующих группировок на основе динамических моделей с учётом противодействия противника и интенсивности поступления средств резерва.

динамическая модель, однородные и разнородные боевые средства

Введение

Постановка задачи. При решении задач планирования и управления в ходе ведения военных действий необходимо иметь возможность определять оптимальный состав однородных и разнородных сил и средств оперирующих сторон, исходя при этом от поставленных целей, складывающейся ситуации, вероятных действий противника и интенсивности поступления средств резерва противоборствующих группировок.

Расчёт сил и средств при планировании и последующем ведении боевых действий представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. В известной литературе, посвящённой исследованию операций в военном деле [1 – 5] рассматриваются вопросы применения исследования операций к решению задач управления войсками. При этом основное внимание уделено вероятностным оценкам, с помощью которых определяются вероятности выполнения боевых задач конфликтующими группировками. Однако в этих работах не предполагаются методы количественной оценки состава боевых средств противоборствующих группировок. В работе [6] предложены математические соотношения, позволяющие определить состав однородных боевых средств на основе статических моделей с учётом противодействия противника. В работе [7] изложены разработанные математические модели оптимизации состава разнородных боевых средств на основе статических моделей с учётом противодействия противника

Целью статьи является разработка формализованного представления задач определения состава однородных и разнородных сил и средств противоборствующих группировок на основе динамических моделей с учётом противодействия противника и интенсивности поступления средств резерва в ходе ведения военных действий.

Основной материал

Рассмотренные в работах [6, 7] математические модели определения состава однородных и разнородных сил и средств на основе статических моделей не учитывают, прежде всего, динамику боя (количества сил и средств противоборствующих группировок, меняются во времени); не учитывают скорострельности боевых сил и средств; ориентируются на средние вероятности поражения одним боевым средством другого, а не на вероятности поражения боевого средства одним выстрелом; практически исключают учёт поступления средств резерва; противодействие учитывается также в среднем и т.д. Поэтому их использование целесообразно лишь в первом приближении.

Рассмотрим задачу определения оптимального состава однородных боевых средств группировки А, действующей против однородной группировки В в количестве y_0 боевых средств при отсутствии средств резерва для обеих группировок, по критерию минимума количества однородных боевых средств, необходимых для γ -истощения боевых средств группировки В. Эта задача описывается следующей системой дифференциальных уравнений [6].

$$\begin{aligned} y(0) &\rightarrow \min; \\ \frac{dx(t)}{dt} &= -by(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ax(t); \\ y(0) &= y_0; \\ y(T) &\leq 0,01 \gamma y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – математические ожидания количества средств группировок А и В, сохранившихся к моменту времени t ; $a = \alpha P$ и $b = \beta Q$ – эффективные скорострельности средств, используемых группировками А и В; α и β – средние скорострельности средств, используемых группировками А и В; P и Q – вероятности поражения одним выстрелом боевых средств группировок А и В; T – время боя.

При наличии средств резерва для обеих группировок система дифференциальных уравнений, описывающих конфликтную ситуацию, имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} & y(0) \rightarrow \min; \\ & \frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t); \\ & \frac{dy(t)}{dt} = -ax(t) + v(t); \\ & y(0) = y_0; \\ & y(T) \leq 0,01ry_0; \\ & 0 \leq u(t) \leq c; \\ & \int_0^T u(t)dt \leq A_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u(t)$ и $v(t)$ – интенсивности поступления средств резерва группировок А и В; c – максимальная интенсивность поступления резерва группировки А; A_0 – общее количество средств резерва.

Для случая противостояния однородной группировки А разнородным боевым средствам группировки В от системы дифференциальных уравнений (2) переходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \min_{\{\alpha_j\}} x(0); \\ & \frac{dx(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^n b_j y_j(t); \\ & \frac{dy_j(t)}{dt} = -\alpha_j a_j x(t); \\ & y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n}; \\ & \sum_{j=1}^n w_j y_j(T) \leq 0,01r \sum_{j=1}^n w_j y_j^0; \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где n – количество типов боевых средств группировки В; $a_j = \alpha_0 P_j$ – эффективная скорострельность боевых средств группировки А по боевым средствам j -го типа группировки В; α_0 – средняя скорострельность боевых средств группировки А по боевым средствам j -го типа группировки В; $P_j (j = \overline{1, n})$ – вероятность поражения одним выстрелом боевых средств группировки А боевого средства j -го типа группировки В; $b_j = \beta_{0j} Q_j$ – эффективная скорострельность боевых средств j -го типа группировки В по боевым средствам группировками А; $\beta_{0j} (j = \overline{1, n})$ – средняя скорострельность боевых средств j -го типа группировки В;

$Q_j (j = \overline{1, n})$ – вероятность поражения одним выстрелом боевых средств j -го типа группировки В боевыми средствами группировки А; $\alpha_j (j = \overline{1, n})$ – доля боевых средств группировки А, выделяемых для поражения боевых средств j -го типа группировки В; $y_j^0 (j = \overline{1, n})$ – количество боевых средств j -го типа группировки В; $w_j (j = \overline{1, n})$ – коэффициент важности боевых средств j -го типа группировки В; $r\%$ – заданный уровень поражения суммарного количества боевых средств группировки В с учётом их важности.

Сформулируем решаемую задачу, соответствующую модели (3) следующим образом: определить оптимальное распределение боевых средств группировки А по разнородным боевым средствам группировки В, имеющим в наличии $y_j^0 (j = \overline{1, n})$ боевых средств j -го типа, по критерию минимума суммарного количества однородных боевых средств, необходимых для r -истощения суммарного количества боевых средств группировки В с учётом их важности.

Обобщим модель (3) для случая наличия резерва для обеих группировок в предположении, что известны: $v_j (j = \overline{1, n})$ – интенсивность поступления средств резерва боевых средств j -го типа группировки В; c – максимальная интенсивность поступления сил резерва боевых средств группировки А; A_0 – величина резерва боевых средств группировки А. Искомая математическая модель примет вид:

$$\begin{aligned} & \min_{\{\alpha_j\}, \{u\}} x(0); \\ & \frac{dx(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^n b_j y_j(t) + u(t); \\ & \frac{dy_j(t)}{dt} = -\alpha_j a_j x(t) + v_j(t); \\ & y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n}; \\ & \sum_{j=1}^n w_j y_j(T) \leq 0,01r \sum_{j=1}^n w_j y_j^0; \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ & 0 \leq u(t) \leq c; \\ & \int_0^T u(t)dt \leq A_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где смысл параметров $a_j, b_j, \alpha_j, w_j, r$ – аналогичен смыслу параметров в модели (3).

Определяя состав разнородных сил и средств на основе динамических моделей, рассмотрим си-

туацию, когда группировка А, содержащая m типов боевых средств, действует против однородной группировки В, имеющей в наличии y_0 боевых средств.

Тогда задача определения состава разнородных сил и средств группировки А формируется следующим образом: определить оптимальный состав боевых средств группировки А, действующей против y_0 боевых средств группировки В при известном плане распределения их долей $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$ по разнородным боевым средствам, по критерию минимума суммарной скорострельности боевых средств группировки А, необходимых для τ -истощения суммарного количества боевых средств группировки В.

Сохраняя вышеприведенную методику построения математических моделей, имеем:

$$\begin{aligned} & \min_{\{x_i(0)\}} \sum_{i=1}^m d_i x_i(0); \\ & \frac{dx_i(t)}{dt} = -\beta_i b_i y(t); \\ & \frac{dy(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m a_i x_i(t); \\ & y(0) = y_0; \\ & \sum_{i=1}^m \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \\ & y(\tau) \leq 0, 01 \tau y_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $b_i = \beta_0 Q_i$ – эффективная скорострельность боевых средств группировки В по боевым средствам i -го типа группировки А; β_0 – средняя скорострельность боевых средств группировки В по боевым средствам i -го типа группировки А; $Q_i (i = \overline{1, m})$ – вероятность поражения одним выстрелом боевых средств группировки В боевого средства i -го типа группировки А; $a_i = \alpha_{oi} P_i$ – эффективная скорострельность боевых средств i -го типа группировки А по боевым средствам группировками В; $\alpha_{oi} (i = \overline{1, m})$ – средняя скорострельность боевых средств i -го типа А; $\beta_i (i = \overline{1, m}), d_i (i = \overline{1, m})$ – вероятность поражения одним выстрелом боевых средств i -го типа группировки А боевых средств группировки В; – стоимость боевых средств i -го типа группировки А.

Для случая наличия средств резерва для обеих группировок в предположении, что известны: $v(t)$ – интенсивности поступления средств резерва группировки В; $c_i (i = \overline{1, m})$ – максимальная интенсивность поступления боевых средств резерва i -го типа группировки А; $A_i (i = \overline{1, m})$ – величина резерва

боевых средств i -го типа группировки А. Соответствующая математическая модель принимает вид:

$$\begin{aligned} & \min_{\{x_i(0)\}, \{u_i\}} \sum_{i=1}^m d_i x_i(0); \\ & \frac{dx_i(t)}{dt} = -\beta_i b_i y(t) + u_i(t), i = \overline{1, m}; \\ & \frac{dy(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m a_i x_i(t) + v(t); \\ & y(0) = y_0; \\ & \sum_{i=1}^m \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \\ & y(\tau) \leq 0, 01 \tau y_0; \\ & 0 \leq u_i(t) \leq d_i, i = \overline{1, m}; \\ & \int_0^{\tau} u_i(t) dt \leq A_0, i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим общий случай противодействия группировки А, содержащей m типов разнородных боевых средств и группировки В, имеющей n типов разнородных боевых средств в количестве $y_j^0 (j = \overline{1, n})$ боевых средств j -го типа. Соответствующая задача определения состава разнородных сил и средств формируется следующим образом: определить оптимальный состав боевых средств и оптимальный план распределения $\|\alpha_{ji}\|_{n,m}$ долей боевых средств группировки А, действующей против $y_j^0 (j = \overline{1, n})$ количеств боевых средств каждого типа группировки В при известном их плане распределения долей разнородных боевых средств $\|\beta_{ij}\|_{m,n}$ по разнородным боевым средствам группировки А, по критерию минимума суммарной стоимости боевых средств группировки А, необходимых для τ -истощения суммарного количества боевых средств группировки В с учётом их важности. Соответствующая математическая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} & \min_{\{x_i(0)\}, \{\alpha_{ji}\}} \sum_{i=1}^m d_i x_i(0); \\ & \frac{dx_i(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), i = \overline{1, m}; \\ & \frac{dy_j(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), j = \overline{1, n}; \\ & y(0) = y_j^0, j = \overline{1, n}; \\ & \sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1, j = \overline{1, n}, \beta_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} = 1, i = \overline{1, m}, \alpha_{ji} \geq 0, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^n w_j y_j(T) \leq 0, 01 r \sum_{j=1}^n w_j y_j^0, \tag{7}$$

где $b_{ij} = \beta_{0j} Q_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – эффективная скорострельность боевых средств j -го типа группировки В по боевым средствам i -го типа группировки А; $\beta_{0j} (j = \overline{1, n})$ – средняя скорострельность боевых средств j -го типа группировки В; $Q_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – вероятность поражения одним выстрелом боевых средств j -го типа группировки В боевого средства i -го типа группировки А; $a_{ji} = \alpha_{0i} P_{ji} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – эффективная скорострельность боевых средств i -го типа группировки А по боевым средствам j -го типа группировки В; $\alpha_{0i} (i = \overline{1, m})$ – средняя скорострельность боевых средств i -го типа группировки А; $P_{ji} (j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ – вероятность поражения одним выстрелом боевых средств i -го типа группировки А боевых средств j -го типа группировки В; $\beta_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – доля боевых средств j -го типа группировки В, действующих против боевых средств i -го типа группировки А; $\alpha_{ji} (j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ – доля боевых средств i -го типа группировки А, действующих против боевых средств j -го типа группировки В; $d_i (i = \overline{1, m})$ – стоимость боевых средств i -го типа группировки А.

Для случая наличия средств резерва для обеих группировок в предположении, что известны: $v(t)$ – интенсивности поступления средств резерва группировки В; $c_i (i = \overline{1, m})$ – максимальная интенсивность поступления боевых средств резерва i -го типа группировки А; $A_i (i = \overline{1, m})$ – величина резерва боевых средств i -го типа группировки А. Параметры d_i, w_j, r – аналогичны таким же параметрам в моделях (4), (5). При наличии резерва модель (7) примет вид:

$$\min_{\{x_i(0)\}, \{\alpha_{ji}\}, \{u_j\}} \sum_{i=1}^m d_i x_i(0);$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) + u_i(t), i = \overline{1, m};$$

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) + v_j(t), j = \overline{1, n};$$

$$(0) = y_j^0, j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1, j = \overline{1, n}, \beta_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} = 1, i = \overline{1, m}, \alpha_{ji} \geq 0, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^n w_j y_j(T) \leq 0, 01 r \sum_{j=1}^n w_j y_j^0;$$

$$0 \leq u_i(t) \leq c_i, i = \overline{1, m};$$

$$\int_0^T u_i(t) dt \leq A_i, i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

где смысл параметров c_i, A_i определён в модели (6), а $u_i(t)$ и $u_j(t)$ – интенсивности поступления средств резерва группировок А и В.

Выводы

1. В статье изложено формализованное описание задач определения оптимального количества сил и средств однородных и разнородных боевых средств, противоборствующих группировок.
2. Предложены математические соотношения для определения количественного состава однородных и разнородных боевых средств на основе динамических моделей с учётом противодействия противника и интенсивности поступления средств резерва противоборствующих группировок.
3. Предложенные математические модели можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

Список литературы

1. Основы исследования операций в военной технике / Под ред. Ю.В. Чуева. – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.
2. Осинский Л.М. Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушной обороны. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.
3. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.
4. Справочник по исследованию операций / Под общ. ред. Ф. А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
5. Военно-экономический анализ и исследование операций. Ч. 3. Количественные методы обоснования военно-экономических решений / Г.П. Жуков и др. – М.: МФИ, 1981. – 252 с.
6. Кононов В.Б. Математические модели задач оптимизации состава однородных боевых средств противодействующих группировок // Системы обработки информации. – Х.: ХУ ПС, 2007. – Вып. 1(59). – С. 60-63.
7. Кононов В.Б. Математичні моделі завдань оптимізації складу різнорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидіючих угруповань // Системи озброєння і військова техніка. – 2007. – Вып. 1 (9). – С. 37-41.

Поступила в редколлегию 13.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.