УДК 531.19

Ю.П. Мачехин

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ХАУСДОРФОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье изучается вопрос описания результатов измерений в хаусдорфовом пространстве. Эффективность количественной оценки в рассматриваемом случае связана с использованием фрактальной размерности.

хаусдорфово пространство, фрактальная размерность, неопределенность

Введение

Современные методы анализа, обработки и оценки неопределенности результатов измерений разработаны с учетом предположения, что все случайные физические процессы, влияющие на статистический разброс результатов наблюдений, являются эргодическими процессами. Это условие обеспечивает эквивалентность применения временного усреднения и усреднения по ансамблю возможных состояний системы. Со свойством эргодичности связаны вероятностные методы описания результатов измерений. В тоже время для анализа результатов измерений может использоваться аппарат теории множеств в топологических метрических пространствах.

Целью настоящей работы было проведение исследований методов оценки результатов измерений в нелинейных динамических системах базирующихся на свойствах множеств в T_2 – пространствах или хаусдорфовых пространствах [1].

Выбор данного типа топологического пространства связан с тем, что в соответствии с определением, пространство X является хаусдорфовым, если для каждой пары элементов (точек) множества x_1, x_2 $\in X$ существуют открытые множества U_1, U_2 такие, что $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ [1], т.е. основным свойством хаусдорфова пространства является отделимость элементов этого множества друг от друга. Результаты многократных измерений параметров одного и того же объекта, полученные в одной и той же физической ситуации, представляет собой множество несовпадающих точек $x_i \in X$ (i = 1...n). Все результаты измерений как элементы множества отделены друг от друга непересекающимися окрестностями, поскольку одной из координат рассматриваемого пространства является время. Это значит, что точки множества, представляющие результаты измерений x_1, окружены открытыми множествами $U \in B(x_i)$ и $V \in B(x_j)$ такими, что $U \cap V = \varnothing$ (если i ≠ j). Основываясь на этом выводе, в работе было предложено множество результатов измерений изучать с учетом свойств хаусдорфовых множеств [2].

Метрика топологических пространств и вероятностные оценки результатов измерений

Из свойств метрики топологических пространств X [1] следует один важный для теории измерений вывод – в метрических пространствах существуют сжимающие отображения T X→X такие, что если существует такое число s, 0 < s < 1, то

$$d(T(x),T(y)) \le s\, d(x,y),$$

где $d(x_n, x)$ – мера, соответствующая данному пространству. Последовательность точек $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $x \in X$, который определяется мерой, сходящийся к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 .$$

Такие сжимающие отображения [73] связаны с существованием неподвижных предельных точек, то есть, для отображения T точка x является неподвижной, если выполняется условие $T(x) = x$.

Неподвижной точкой в евклидовом пространстве является результат применения сжимающего отображения – интегрального преобразования, в котором функция φ(x) определена как функция плотности вероятности распределения

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx .$$

Использование этого сжимающего отображения позволяет осуществить сжатие измерительной информации, в результате которого определяется неподвижная точка

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}\varphi(x)dx .$$

Неподвижная точка $\bar{x}$, рассмотренного сжимающего интегрального преобразования, представляет собой состоятельную и несмещенную оценку результатов измерений. Все используемые статистические методы преобразования множеств результатов измерений, выполняются с целью определения предельного множества, которое характеризует возможные действительные значения измеряемой величины. Таким же образом, определяются диаметры множеств, включающих в себя с установленной вероятностью возможные значения измеряемой величины.

Следовательно, используемые методы оценки среднего значения, дисперсии среднего значения, а также дисперсии результатов наблюдений, представляют собой определение размера одномерных множеств, вложенных друг в друга, элементы которых максимально приближаются к действительному значению. Т.е. предельное множество, определяемое на основе вероятностных оценок, представляет собой наиболее вероятное множество значений измеряемой величины. Именно это значение, которое удовлетворяет условию неподвижной точки преобразования, и рассматривается как действительное (или действительные) значение измеряемой величины.

Свойства хаусдорфовых пространств

Хаусдорфово множество имеет две принципиальные особенности, которые могут быть использованы при анализе результатов измерений. К этим особенностям относятся:

– метрика хаусдорфова пространства [3] отлична от метрики эвклидова пространства;

– размерность хаусдорфова множества в пространстве может быть дробной и не совпадать с топологической размерностью [261].

Метрика хаусдорфова пространства [3] позволяет ввести понятие предела последовательности множеств. Так, если E_n, n = 1, 2, 3, …, последовательность компактных множеств, вложенных друг в друга

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...,$$

а E представляет пересечение множеств E_n

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n ,$$

то последовательность множеств E_n сходится к E в хаусдорфовой метрике

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E.$$

При этом, в метрике Хаусдорфа расстояние $H(E_n, E)$, также как и в эвклидовой метрике, между двумя множествами удовлетворяет предельному переходу

$$\lim_{n\to\infty} H(E_n, E) = 0.$$

Применительно к результатам измерений свойство сходимости хаусдорфовых множеств означает, что итогом преобразования (сжатия) множества результатов измерений является предельное множество, которое описывает множество возможных действительных значений измеряемой величины. Свойство хаусдорфового исходного множества результатов измерений принципиально позволяет определить сжимающее преобразование T, с помощью которого вычисляется предельное множество E, удовлетворяющее уравнению

$$T(E) = E.$$

Для определения по результатам измерений преобразования «T» и предельных множеств в хаусдорфовых пространствах в работе было предложено использовать вторую особенность хаусдорфовых множеств, которая связана с нецелой хаусдорфовой (фрактальной) размерностью множеств [4]. В связи с тем, что фрактальными, в статистическом смысле, являются процессы случайного или броуновского блуждания, то в работе был применен аппарат фрактального анализа временных рядов результатов измерений.

С физической точки зрения анализ фрактальной структуры множеств результатов измерений представляет собой исследование свойств самоподобности или масштабной инвариантности (скейлинга) случайных изменений измеряемой величины на различных интервалах наблюдений.

Фрактальная размерность временных рядов измерений может изменяться в интервале от 1 до 2, поэтому в работе предложено для количественной оценки качества результатов измерений, использовать фрактальную шкалу, каждое значение которой соответствует определенному характеру случайных изменений.

Физическая реализация масштабной инвариантности заключается в связи между пространственным или временным масштабом наблюдения и величиной наблюдаемых отклонений исследуемого параметра. Масштабная инвариантность может быть как детерминированной, так и статистической, то есть она определяется по статистическим усредненным характеристикам объектов или процессов.

Фрактальное представление множества измерений, обладает рядом преимуществ перед вероятностными методами, для которых в каждом конкретном случае требуется доказывать применимость выбранных законов распределения.

Во-первых, фрактальное описание и расчет фрактальной размерности множеств результатов измерений не требуют знания вероятностных характеристик случайного разброса.

Во-вторых, применение фрактальной размерности возможно как в случае динамического хаоса, так и для случайных процессов, что позволяет с единых позиций проводить анализ результатов измерений в любых как линейных, так и нелинейных динамических системах.

В-третьих, значение фрактальной размерности множества результатов измерений можно использовать для реализации сжимаемого преобразования измерительной информации, и таким образом обеспечить оценку действительного значения измеряемой величины.

Для реализации сжимающего преобразования результатов измерений и вычисления предельного множества на основе фрактальной размерности, необходимо сформулировать и описать количественные характеристики этой величины.

В общем случае, фрактальная размерность D множества результатов измерений может иметь значения в интервале $1 \le D \le 2$. Если D равно целому числу, то фрактальная размерность совпадает с топологической размерностью, а соответствующее исследуемое множество представляет собой гладкие кривые (D = 1) или гладкие поверхности (D = 2), т.е. детерминированные процессы. Для случайных, марковских процессов с независимыми приращениями, к которым относятся гауссовские винеровские процессы, фрактальная размерность реализации этих процессов равна D = 1,5.

Если D принимает дробное значение, не совпадающее с 1,5, то исследуемый процесс не является марковским, а значит, обладает памятью (при анализе нестабильности частоты стабилизированных по частоте лазеров было получено, что D < 1,5, т.е. процесс стабилизации частоты у лазеров обладает памятью). Для задач анализа результатов измерений важными являются следующие особенности. При $D \to 1$, случайные изменения имеют относительно малую шумовую составляющую по сравнению с медленными изменениями измеряемой величины. При $D \to 2$, наоборот, случайный (шумовой) разброс результатов измерений соизмерим с величиной медленных изменений.

Таким образом, основываясь на шкале фрактальной размерности, можно смоделировать фрактальное сжимающее преобразование.

Для случая евклидовых линий, для которых D = 1, преобразование T должно обращать линию в линию, что возможно при следующем виде преобразования $T = a^{1-D}$.

Это подтверждает положение, что все евклидовы одномерные множества с топологической размерностью, равной единице, всегда являются неподвижными точками преобразования.

Если рассматривать множества с размерностью D = 2, т.е. евклидовы поверхности, то в этом случае преобразование поверхности имеет неподвижную точку в виде самой поверхности, следовательно, преобразование T должно иметь вид

$$T = (D - 1)^{(D-1)}.$$

Отсюда следует, что преобразование должно быть связано со свойствами самого множества. Так для евклидовых множеств, с целыми размерностями коэффициент преобразования равен единице и исходное множество является предельным множеством или неподвижной точкой, а любое другое множество, имеющее значение фрактальной размерности в интервале от 1 до 2 будет иметь только сжимающее преобразование с коэффициентом всегда меньше единицы. Так, например, при D=1,5 $T = (0,5)^{0,5}$, что представляет величину явно меньшую единице и, следовательно, будет приводить множество к сжатию.

Заключение

В работе для построения сжимающих методов обработки результатов измерений предложено использовать фрактальную размерность в хаусдорфовом пространстве как объективную количественную оценку случайных вариаций результатов измерений.

Список литературы

1. Энгелькинг Р. Общая топология: Пер. с англ. – М.: Мир,1986. – 744 с.

2. Мачехин. Ю.П. Физические модели анализа результатов измерений // Измерительная техника. – 2005. – № 6. – С. 25-30.

3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории: Пер. с англ. – М.: Постмаркер, 2000. – 352 с.

4. ГуревичВ., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ИЛ, 1948. – 231 с.

Поступила в редколлегию 00.00.2007

Рецензент: д-р техн. наук, доц. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков.