УДК 006.91.001:53.088.2

Е.Т. Володарский[1], Л.А. Кошевая[2], Е.А. Мишина[2]

[1]*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*
[2]*Национальный авиационный университет, Киев*

КОРРЕКТНОСТЬ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ПОСТОЯННЫМ СМЕЩЕНИЕМ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Анализируется возможность учета корреляции при оценке неопределенности, обусловленной постоянным смещением результатов измерений. Оценен физический смысл подхода, базирующегося на учете корреляции, и показана сложность его применения. Исходя из процедуры измерений, получены выражения для неопределенности базовых вычислительных алгоритмов.

коррекция, логическая корреляция, неопределенность измерений, стандартная неопределенность, смещение результата измерения, базовые вычислительные процедуры

Понятие корреляции используется для указания наличия стохастической линейной связи. По определению [1] стохастическая связь между случайными величинами появляется обычно тогда, когда имеются общие изменяющиеся случайным образом факторы, которые влияют как на одну, так и на другую величину наряду с другими, неодинаковыми для обеих величин случайными факторами. Так, при $X = f(z_1,\ldots,z_m, v_1,\ldots,v_n)$ и $Y = \varphi(z_1,\ldots,z_m, k_1,\ldots,k_n)$ величины X и Y будут между собой стохастически связаны.

В [2] в Приложении F, пункт F 1.2.3 указывается, что входные величины коррелированы, если для оценки их значений используют одни и те же эталоны, средства измерений, стандартные данные, которые имеют существенную неопределенность Более того, в [3] такую корреляцию называют *логической.*

О корреляции между величинами можно говорить лишь рассматривая совокупность независимых пар многократных измерений этих величин. А так как совместно рассматриваются стандартные данные, эталоны и средства измерений, то можно сделать вывод, что речь идет об однократных измерениях, что сразу не попадает под определение корреляции, данное выше

Кроме того, мы имеем дело с возможными значениями отклонений конкретных данных или характеристик средств измерений от некоторого предписанного (номинального) значения. Для данного (конкретного) средства измерений это отклонение нам неизвестно, но оно остается постоянным при всех измерениях. В этой связи правомочно использование вероятностного подхода, предполагая равномерный закон распределения возможных значений, что соответствует неопределенности по типу B. Исходя из этих позиций выражение (F1), приведенное в Приложении [2] является корректным, чего, с нашей точки зрения, нельзя сказать про выражение (F2), которое, как сказано, используется для оценки ковариации. С нашей точки зрения здесь имеет место смещение оценок на одно и то же значение, а вклад этого смещения в неопределенность результата оценивается при помощи рассеяния возможных значений, находящихся в нормированных пределах (чаще всего с вероятностью, равной единице) и соответствующего коэффициента влияния.

В Приложении 5 [2], раздел 5.2.2 дается пример, который как раз и подтверждает изложенную нами точку зрения. В этом примере оценивается комбинированная неопределенность эталонного резистора R_{ref}, полученного последовательным соединением десяти резисторов, откалиброванных со стандартной неопределенностью $u(R_S)$. Этот пример автоматически перенесен в [4, 5] для иллюстрации положения о наличии корреляции при использовании калиброванных по одному и тому же опорному эталонному резистору R_S n составных резисторов Ri, ($i = \overline{1,10}$). Здесь для определения стандартной неопределенности $u_c(R_{ref})$ исходят из того, что коэффициенты корреляций для каждой пары резисторов равны +1.

В действительности полученное значение эталонного резистора R_{ref} включает в себя n = 10 одинаковых смещений, неопределенность возможных рассеяний каждого из которых определяется $u(R_S)$.

Таким образом, имеем

$$u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_S), \tag{1}$$

что совпадает с результатом, полученным в Приложении 5 [2].

Предположим, что при калибровке каждого из Ri резисторов имело бы место случайное отклонение значения опорного резистора от номинального значения R_S. Стандартная неопределенность воспроизведения равна $u_c^*(R_S)$, но уже по типу A. Тогда было бы справедливо равенство

$$u_c^*(R_{ref}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \left[u_c^*(R_S)\right]^2}\ . \tag{2}$$

Однако, в рассматриваемом примере имеет место только постоянное смещение значения опорного резистора R_S, поэтому некорректность использования выражения (2) как указано в Приложении [2], справедлива.

Таким образом, в условиях, указанных в пункте F 1.2.3 Приложения F[2] при расчете неопределенности по типу В необходимо пользоваться выражением (1), а по типу А – выражением (2). Можно попытаться понять авторов [2], которые для унификации расчетов неопределенности ввели, так называемую, *логическую* корреляцию. Однако при этом неоправданно усложняется расчет комбинированной неопределенности.

Пусть, например, необходимо оценить неопределенность измерения площади прямоугольника S = ab, где a – его длина, b – ширина. При помощи штангенциркуля были измерены стороны прямоугольника и получены соответственно их оценки:

$$\tilde{a} = a + \Delta + \mathring{\Delta} \quad \text{и} \quad \tilde{b} = b + \Delta + \mathring{\Delta},$$

где Δ – смещение результата, обусловленное классом точности средства измерений; $\mathring{\Delta}$ – случайная составляющая смещения, изменяющаяся в пределах цены деления отсчетного устройства.

Стандартные неопределенности результата измерения длины u(a) и ширины u(b) будут

$$u(a) = u(b) = \sqrt{u^2(\Delta) + u^2(\mathring{\Delta})}, \tag{3}$$

а коэффициенты чувствительности определятся как

$$c_a = \frac{\partial S}{\partial a} = b \quad \text{и} \quad c_b = \frac{\partial S}{\partial b} = a.$$

В соответствии с [2] оценки попарных коэффициентов будут

$$\xi_{a\Delta} = \frac{\partial a}{\partial \Delta} = 1; \quad \xi_{b\Delta} = \frac{\partial b}{\partial \Delta} = 1$$

и коэффициент парной корреляции запишется как

$$r_{ab} = \frac{\xi_{a\Delta}\xi_{b\Delta}u^2(\Delta)}{u(a)u(b)}.$$

Для нахождения суммарной неопределенности воспользуемся выражением

$$u^2(\tilde{S}) = [c_a u(a)]^2 + [c_b u(b)]^2 + 2c_a c_b u(a)u(b)2r_{ab}$$

или после подстановки

$$u(\tilde{S}) = \sqrt{b^2u^2(a) + a^2u^2(b) + 2abu(a)u(b)\frac{u^2(\Delta)}{u(a)u(b)}}.$$

Воспользовавшись соотношением (3) окончательно получим выражение для неопределенности результата измерения площади прямоугольника

$$u(\tilde{S}) = \sqrt{(a+b)^2u^2(\Delta) + (a^2+b^2)u^2(\Delta)}. \tag{4}$$

Такой же результат можно получить, если исходить из выражения

$$\tilde{S} = (a + \Delta + \mathring{\Delta})(b + \Delta + \mathring{\Delta}).$$

Принимая во внимание, что при измерении длины и ширины $\mathring{\Delta}$ принимает различные независимые значения, а Δ остается неизменной, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, можно записать

$$\tilde{S} = ab + (a+b)\Delta + a\mathring{\Delta} + b\mathring{\Delta}.$$

Тогда, воспользовавшись основными свойствами дисперсии [1], получим

$$D(\tilde{S}) = (a+b)^2 D(\Delta) + (a^2+b^2)\ D(\mathring{\Delta}),$$

из которого получим выражение (4) для стандартной неопределенности $u(\tilde{S})$.

Как видно из рассмотренного простейшего примера, введение, так называемой, логической корреляции делает процедуру вычисления стандартной неопределенности результата довольно сложной, в то время как рассмотренный подход упрощает эту процедуру.

В табл. 1 представлены модельные уравнения основных вычислительных операций.

Таблица 1

Модельное уравнение	Стандартная неопределенность u(z)
z = ax + by	$\sqrt{(a+b)^2u^2(\Delta) + (a^2+b^2)u^2(\Delta)}$.
z = ax – by	$\sqrt{(a-b)^2u^2(\Delta) + (a^2+b^2)u^2(\Delta)}$.
z = ax × by	$\sqrt{a^2b^2 + \left[(x+y)^2u^2(\Delta) + (x^2+y^2)u^2\left(\mathring{\Delta}\right)\right]}$
z = ax / by	$\sqrt{\frac{1}{(b^2y^2)^2}\left[a^2b^2(y-x)^2u^2(\Delta) + a^2b^2(x^2+y^2)u^2\left(\mathring{\Delta}\right)\right]}$

Здесь x и y – независимые переменные, a и b – постоянные коэффициенты, отличные от нуля.

Располагая выражениями для стандартной неопределенности базовых вычислительных процедур, можно определить стандартную неопределенность практически любой сложности модельного уравнения. Для этого необходимо использовать, так называемое, правило «матрешки».

На первом этапе исходное уравнение преобразуется (сворачивается) до одного из базовых уравнений, для которого выражение стандартной неопределенности известно. Затем переходим ко второму этапу – обратному преобразованию элементов «свернутого» уравнения, используя базовые вычислительные процедуры.

Такой подход позволяет формализовать процедуру вычисления стандартной неопределенности результата, и не учитывать искусственно введенную в [2], логическую корреляцию.

Список литературы

1. Смирнов Н.И., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 p.

3. Захаров І.П. Розвиток теорії та методів оцінювання точності результатів вимірювань з урахуванням концепції невизначеності: Автореферат дисертації на здобуття ступеня доктора технічних наук. – Х., 2006. – 39 с.

4. Захаров И.П., Кукуш В.Д., Теория неопределенности в измерениях: Учебн. пос. – Х.: Консум, 2002. – 256 с.

5. Ціделко В.Д., Яремчик Н.А.. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результату вимірювання. – К.: ІОЦ Видавництво «Політехніка», 2002. – 176 с.

Поступила в редколлегию 21.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.