

УДК 537.874.7

А.С. Черепнев¹, И.А. Черепнев¹, В.Е. Новиков², Е.В. Хоменко³

¹Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства им. П. Василенко

²Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины, Харьков

³«РАДМИР» ДП АО НИИРИ, Харьков

ОСОБЕННОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КЛЕТОЧНЫХ СТРУКТУРАХ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрены явления, возникающие в клетках и их структурах под воздействием слабых электромагнитных полей с учетом влияния шума. Приведены основные понятия, связанные со стохастическим резонансом и резонансом, индуцированным многообразием. Приведена модель эволюции колебательных систем под воздействием последовательности сложно модулированных и периодических электромагнитных импульсов на основе системы итерируемых функций.

стохастический процесс, клеточная структура, электромагнитное поле

Введение

Наиболее распространенными явлениями, пронизывающими нашу жизнь и окружающие нас фи-

зические и технологические процессы, являются электромагнитные колебания, которые, с одной стороны, являются основой жизни всех биологических объектов, а с другой – технологической основой

нашей цивилизации. Поэтому исследование возможности управления электромагнитными процессами на всех масштабах от микроскопических (в т.ч. клеточных) до макроскопических является важнейшей задачей, решение которой позволит регулировать необходимые человеку условия жизни.

В настоящей работе рассмотрены некоторые современные модели влияния регулярных и хаотических электромагнитных полей на электрофизические свойства, как одиночных клеток, так и сети взаимодействующих клеток и обсуждаются процессы, протекающие в живой клетке.

Понимание механизмов функционирования клетки получило наибольшее продвижение в середине прошлого века, когда стала понятна их электрофизическая природа и начала создаваться математическая модель функционирования клетки. Основные представления и элементы математического описания работы клетки, установленные в 50–60-х годах прошлого века (начиная с известной работы Ходжкин и Хаксли [1]), успешно используются и сейчас [2]:

- перенос ионов Na^+ и K^+ осуществляется различными слабо взаимодействующими структурами;
- изменения токов через мембрану является следствием изменения проницаемости мембран для ионов Na^+ и K^+ ;
- проницаемость мембран определяется электрическим полем.

Проводимость ионов натрия и калия регулируется несколькими типами частиц, которые также участвуют в процессе проникновения через мембрану. Потенциал мембраны $\varphi(t)$ моделируется двумя устойчивыми состояниями (потенциальными ямами), находящимися у внешней и внутренней части мембраны и, естественно, разделяющимися потенциальным барьером, препятствующим переходу частиц с одной стороны на другую. Это перемещение частиц можно представить в виде перескоков положительных ионов через потенциальный барьер клеточной мембраны с вероятностями, которые зависят от высоты этого барьера.

Экспериментальные данные показывают, что перенос ионов калия управляется одним типом активирующих этот переход частиц (концентрация которых обозначена символом n), а перенос ионов натрия другим типом частиц с концентрацией m и инактивируется клеточная мембрана частицами с концентрацией h .

Уравнения для изменения концентраций всех частиц можно записать в виде уравнений баланса (уравнений релаксационного типа):

$$\frac{dn}{dt} = (\bar{n}(\varphi) - n) / \tau_n(\varphi); \quad \frac{dm}{dt} = (\bar{m}(\varphi) - m) / \tau_m(\varphi);$$

$$\frac{dh}{dt} = (\bar{h}(\varphi) - h) / \tau_h(\varphi), \quad (1)$$

где $\tau_n(\varphi)$, $\tau_m(\varphi)$ и $\tau_h(\varphi)$ – соответствующие характерные времена релаксации, а $\bar{n}(\varphi)$, $\bar{m}(\varphi)$ и $\bar{h}(\varphi)$ значения установившихся (равновесных) концентраций соответствующих ионов.

Закон Кирхгофа для участка электрофизической цепи с учетом калиевых и натриевых токов через клеточную мембрану (обозначим проводимости σ_{Ka} , σ_{Na}) приводит к уравнению:

$$C \frac{d\varphi}{dt} = - \left((\sigma_{\text{Na}} m^3 h + \sigma) (\varphi - \varphi_{\text{Na}}) + (\sigma_{\text{K1}}(\varphi) + \sigma_{\text{K2}} n^4) (\varphi - \varphi_{\text{K}}) + \sigma_{\text{I}} (\varphi - \varphi_{\text{I}}) \right) + I_{\text{ex}}. \quad (2)$$

Здесь I_{ex} – внешний ток; C – удельная емкость мембраны; $I_C = C \frac{d\varphi}{dt}$ – ток через мембрану.

Как видно, потенциал клеточной мембраны описывается сильно нелинейной системой достаточно высокого порядка (обычно четвертого или третьего) и к исследованию особенностей эволюции потенциала клеточной мембраны необходимо применять численные методы. Влияние внешней среды на мембранный потенциал приводит к появлению стохастических токов I_{noise} в правой части уравнений для потенциала (2), т.е. внешний ток I_{ex} состоит из суммы регулярной части I_{reg} и шума I_{noise} : $I_{\text{ex}} = I_{\text{reg}} + I_{\text{noise}}$ и электрофизическая модель клетки представляет собой нелинейную колебательную систему под действием регулярных и случайных внешних воздействий.

Одной из интереснейших особенностей, проявляющихся в нелинейных динамических системах под воздействием шума и регулярных воздействий, является возникновение стохастического резонанса (СР), кратко описанное ниже.

Стохастический резонанс

Термин «стохастический резонанс» объединяет группу эффектов, при которых увеличение "беспорядка" (амплитуды шума) на входе нелинейной системы приводит при определенных условиях к увеличению "порядка" на выходе. Количественно эффект проявляется в том, что такие макроскопические характеристики системы как коэффициент усиления, отношение сигнал/шум имеют отчетливо выраженный максимум при некотором оптимальном уровне шума. В то же время, энтропия системы достигает минимума, свидетельствуя о возрастании индуцированного шумом порядка.

Концепция стохастического резонанса была впервые предложена в работах [3, 4] при анализе

проблемы чередования ледниковых периодов на Земле. Проблема связана с тем, что анализ показывает, что чередование ледниковых периодов происходит с интервалом порядка 10^5 лет. Этот результат казался совершенно непонятным, так как единственная величина такого временного масштаба в динамике Земли – период колебаний эксцентриситета орбиты Земли. Однако изменение приходящего на Землю потока солнечной энергии, связанное с этими осцилляциями, не превышает 0,1% и этого недостаточно для радикальных изменений климата.

Разрешение приведенного выше парадокса привело к открытию нового явления – стохастического резонанса. Первые работы по стохастическому резонансу обязательно включали следующие фундаментальные элементы: нелинейность, бистабильность, внешний периодический сигнал и шум, однако не все эти элементы являются обязательными атрибутами для стохастического резонанса:

- можно отказаться от необходимости рассматривать только бистабильные системы и представить стохастический резонанс как чисто пороговый эффект;

- возможно отсутствие внешнего периодического сигнала;

- возможны ситуации, при которых когерентное движение стимулируется не внешней силой, а внутренней динамикой нелинейной системы;

- возможен стохастический резонанс без внешнего шума (для хаотических систем шум может генерироваться собственной хаотической динамикой);

- возможны воздействия сверхширокополосных сигналов и сигналов со сложным спектральным составом.

Физические эффекты, определяющиеся взаимосвязью регулярных и хаотических режимов сложных систем, являются очень важными для функционирования биологических объектов. Особенно существенны такие эффекты при воздействии на биологические системы последовательностей коротких импульсов электромагнитного излучения, поскольку при таком воздействии возникает ситуация с взаимодействием процессов с существенно различными масштабами как пространственными, так и энергетическими.

Физический механизм эффекта стохастического резонанса проще всего продемонстрировать на его канонической модели: движение частицы вдоль координаты x в симметричном бистабильном потенциале

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4; \quad (a, b > 0) \quad (3)$$

под действием слабого периодического сигнала $A \cos \omega t$ (с амплитудой A и частотой ω) и случайной силы $\approx \sqrt{D(x)}\Gamma(t)$.

Потенциал имеет два минимума, которые расположены в точках $x_{\min} = \pm\sqrt{a/b}$ и разделены потенциальным барьером, который расположен при $x = 0$ и имеет высоту $\Delta V = a^2/4b$. Под воздействием флуктуационных силы возникают случайные переходы через потенциальный барьер. Скорость этих переходов определяется формулой Крамерса [5]:

$$W_k \approx e^{-\Delta V/D}, \quad (4)$$

где D – интенсивность флуктуаций.

Предположим, что приложенная к частице дополнительная детерминированная сила с частотой ω сама по себе не может привести к преодолению потенциального барьера. Такое возмущение нарушает четность исходного потенциала и приводит к зависимости скоростей переходов W_k от времени. Изменяя интенсивность шума, можно добиться того, что среднее время флуктуационных переходов через барьер (крамерсовское время t_k , равное обратной крамерсовской скорости) будет происходить в фазе с модуляцией потенциального барьера. Условием этого является соотношение:

$$W_k^{-1}(D) \equiv t_k(D) \approx \frac{\pi}{\omega}. \quad (5)$$

Это соотношение определяет оптимальную интенсивность шума, которая оптимизирует когерентность и обеспечивает существование явления «стохастического резонанса». Как для пренебрежимо малых уровней шума, так и для значений шума превосходящих уровень (определяющийся соотношением (5)) скорость флуктуационных переходов практически равна нулю и какая-либо когерентность отсутствует.

Эффект стохастического резонанса состоит в возможности настройки стохастической системы за счет варьирования интенсивностью шума в режим максимального усиления сигнала модуляции. Стохастический резонанс может быть реализован в любой нелинейной системе, где имеется несколько характерных временных масштабов, один из которых можно контролировать с помощью шума.

Системы, демонстрирующие стохастический резонанс, являются в некотором смысле промежуточными между регулярными и нерегулярными системами, поскольку:

- они описываются с помощью случайного процесса;

- прыжки между квазистационарными состояниями не подчиняются детерминированному закону, но в режиме резонанса обладают некоторой степенью регулярности, в частности, координатная корреляционная функция не стремится к нулю на больших временах.

Для количественного описания эффекта стохастического резонанса необходимо получить динамическое уравнение, описывающее взаимодействие броуновской частицы с окружающей средой [6]. Уравнение должно содержать только координаты выделенной частицы, но феноменологически учитывать взаимодействие со средой.

Пусть частица массой M движется в потенциальном поле $V(x)$ (например, в бистабильном потенциале (3)). Функция Лагранжа L для такого движения имеет вид:

$$L_0(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - V(x). \quad (6)$$

Для теплового резервуара (среды) выберем простейшую модель, рассматривая его как совокупность большого числа невзаимодействующих гармонических осцилляторов с координатами q_i , массами m_i , частотами ω_i [6, 7]:

$$L_{hb}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{q}_i^2 - \omega_i^2 q_i^2). \quad (7)$$

Взаимодействие между частицей и тепловым резервуаром $V_{int}(x, q_i)$ будем предполагать линейным по осцилляторным координатам ($V_{int}(x, q_i) \approx \sum_i f_i(x) q_i$). В результате для полного лагранжиана получим выражение:

$$L(x, \dot{x}; q_i, \dot{q}_i) = L_0(x, \dot{x}) + L_{hb}(q_i, \dot{q}_i) + \sum_i f_i(x) q_i. \quad (8)$$

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$M \ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + \sum_i q_i \frac{df_i(x)}{dx};$$

$$m_i \ddot{q}_i = -m_i \omega_i^2 q_i + f_i(x). \quad (9)$$

Для получения интересующего нас уравнения для координаты требуется исключить из этих уравнений координаты теплового резервуара q_i . В результате получаем динамическое уравнение:

$$M \ddot{x} = \tilde{F}(x) + F_{frict}(x, \dot{x}) + F_L(x, t). \quad (10)$$

Здесь введены потенциальная сила $\tilde{F}(x)$, зависящая от координат и скоростей, сила трения $F_{frict}(x, \dot{x})$ и случайная (ланжевенская) сила $F_L(x, t)$, которые могут быть представлены в виде:

$$\tilde{F}(x) = -\frac{d\tilde{V}(x)}{dx};$$

$$\tilde{V}(x) = V(x) - \sum_i \frac{1}{2m_i \omega_i^2} [f_i(x)]^2;$$

$$F_{frict} = -\gamma(x) \dot{x}. \quad (11)$$

Интенсивность ланжевенской силы связана с коэффициентом трения и температурой резервуара

соотношением, известным как частный случай флуктуационно-дисперсионной теоремы:

$$D(x) = \gamma(x) k_B T. \quad (12)$$

Это соотношение является следствием того, что как сила трения, так и ланжевенская сила, порождаются единым взаимодействием броуновской частицы с тепловым резервуаром. Таким образом, динамика броуновской частицы может быть описана уравнением Ланжевена со случайной силой:

$$M \ddot{x} = F(x) - \gamma(x) \dot{x} + A \cos \omega t + \sqrt{D(x)} \Gamma(t), \quad (13)$$

где $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$, $\langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$. В присутствии периодического возмущения $A \cos \omega t$ потенциальная энергия системы приобретает вид:

$$V(x, t) = -\frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4 - A x \cos \omega t. \quad (14)$$

Для дальнейшего удобства представим потенциальную энергию в форме

$$V(x, t) = V_0 [-2(x/c)^2 + (x/c)^4] - V_1(x/c) \cos \omega t. \quad (15)$$

Здесь $c = \pm \sqrt{a/b}$ – положения потенциальных минимумов при $A = 0$; $V_0 = a^2/4b$ – высота потенциального барьера; $V_1 = Ac$ – амплитуда модуляции высоты барьера.

Временная эволюция частицы, находящейся в потенциальном поле и взаимодействующей с равновесным тепловым резервуаром, может быть описана уравнением Ланжевена (13).

Рассмотрим так называемый передемпфированный случай – случай большого трения, когда инерционным (массовым) членом в уравнении движения можно пренебречь [8]. В этом приближении, предполагая, что коэффициент трения (и, следовательно, интенсивность ланжевенской силы) не зависит от координат, уравнения Ланжевена можно представить в виде

$$\dot{x} = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \sqrt{D} \Gamma(t). \quad (16)$$

В отсутствие модуляции ($A = 0$) средняя скорость переходов через барьер (крамерсовская скорость) определяется соотношением

$$W_k \approx \frac{[|V''(0)| |V''(c)|]^{1/2}}{2\pi} e^{-V_0/D} = \frac{\alpha}{2\pi} e^{-V_0/D}. \quad (17)$$

Так как крамерсовская скорость зависит только от высоты барьера и кривизны потенциала в его экстремумах, точная форма потенциала не существенна. Поэтому полученные в дальнейшем результаты качественно применимы к широкому классу бистабильных систем.

Используя выражение (17) для скоростей переходов в присутствии периодического возмущения, получим

$$W_{\pm}(t) = \frac{\alpha}{2\pi} \exp\left[-(V_0 \pm V_1 \cos \omega t)/D\right]. \quad (18)$$

Для выполнения условия равновесия с тепловым резервуаром (при наличии зависящего от времени возмущения) необходимо, чтобы период возмущающего воздействия был много меньше длительности установления теплового равновесия в яме. Скорость установления равновесия определяется величиной $V^*(\pm c) = 2a$. Поэтому условием применимости адиабатического приближения является неравенство $\omega \ll 2a$.

В качестве одной из основных характеристик стохастического резонанса будем использовать отношение сигнал/шум (SNR). В нашем случае это отношение спектральных плотностей сигнала и шума на частоте сигнала, т.е.

$$\text{SNR} = \left[\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \int_{\omega-\Delta\Omega}^{\omega+\Delta\Omega} S(\Omega) d\Omega \right] / S_N(\omega) = \frac{S(\omega)}{S_N(\omega)}. \quad (19)$$

Откуда в пренебрежении влиянием сигнала на шумовой фон, получим:

$$\text{SNR} = \frac{\pi}{4} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0} \eta_0^2 \approx \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left(\frac{Ac}{D} \right)^2 e^{-V_0/D}, \quad (20)$$

где $\mu = V_0/D$, а $\eta_0 = V_1/D = Ac/D$.

При $D \ll V_0$ экспонента стремится к нулю быстрее знаменателя и $\text{SNR} \rightarrow 0$. При больших D рост знаменателя опять обеспечивает стремление SNR к нулю. В промежуточной области при $D \approx V_0/2$ приближенное выражение для SNR (20) имеет единственный максимум.

Полученный результат (20) кажется очень неожиданным: увеличение беспорядка на входе системы (рост амплитуды шума) приводит к увеличению порядка на выходе (рост SNR). Выражение (20) демонстрирует основной эффект стохастического резонанса. Этот эффект может быть использован во многих приложениях, поскольку часто важную роль играет не амплитуда сигнала сама по себе (существует много способов прямого усиления сигнала), а отношение сигнал/шум, определяющее качество передаваемого сигнала. Явление стохастического резонанса открывает принципиально новые подходы к решению проблемы получения максимального отношения сигнал/шум.

Стохастический резонанс в биологических системах

С момента возникновения теории стохастического резонанса начали бурно развиваться приложения этого эффекта кооперативного взаимодействия шума и периодического воздействия в самых разных системах. Были рассмотрены приложения в радиофизических и полупроводниковых устройствах, ла-

зерах и магнитных системах. Например, на основе СР можно сконструировать усилитель, обеспечивающий коэффициент усиления мощности периодического сигнала ~ 30 дБ в условиях, когда интегральная энергия внешнего шума на 60 – 70 дБ превышает энергию полезного сигнала. При определенных условиях обеспечивается не только эффективное усиление в присутствии интенсивного шума, но и наблюдается эффект выделения сигнала из шума, когда отношение сигнал/шум на выходе превосходит существенно входное значение [8].

Интересно (особенно для биологических приложений) применение явления СР при обработке данных, в частности, при использовании нейронных сетей. В последние годы появился ряд сообщений об успешном использовании стохастического резонанса при обработке сигналов и компьютерном распознавании изображений.

Отметим, что после открытия явления СР выяснилось, что он имеет очень широкое распространение в природе. Есть основания полагать, что в процессе эволюции живые организмы приспособились использовать неустранимый внутренний шум и шум окружающей среды для оптимального выделения полезной информации.

Проведенные исследования показали, что наиболее высокую чувствительность сенсорные нейроны биологических объектов проявляли к сигналам с частотой, близкой к 10 Гц. Совсем недавно было обнаружено, что за счет стохастического резонанса улучшается эффективность многих нейрофизиологических процессов и у людей. Например, в 2002 году эксперименты Дж. Коллинза и его коллег из Бостонского университета убедительно показали, что подпороговый тактильный шум (то есть слабые беспорядочные вибрации, сами по себе неощутимые пациентом) способен обострять чувство баланса при ходьбе. А это значит, что специальная обувь с хаотически вибрирующей вкладкой в подошве может улучшить координацию движения у пожилых людей или людей с расстройствами баланса. Другое применение той же идеи – специальные перчатки, создающие слабый тактильный шум, – повысит чувствительность пальцев и окажет незаменимую помощь микрохирургу в ходе операции.

Основные результаты в области изучения электрической активности клеток, полученные в последние десятилетия, связаны с изучением нейронной динамики отдельных нейронов и нейронных сетей. Однако остается открытым вопрос о влиянии внутреннего шума нейронов. Фактически все нейроны являются зашумленными [9, 10], причем уровень внутреннего шума может заметно превышать интенсивность естественного шума состояния термодинамического равновесия [11].

Огромный интерес физиологов к новому физическому явлению быстро привел к открытию кле-

точного механизма «природного» стохастического резонанса: активизация ионных каналов в мембране нейронов и, как следствие, повышение чувствительности нервных окончаний.

Слабый сигнал сам по себе не способен преодолеть порог возбуждения нервных окончаний и потому не ощущается животными. Шум же «открывает» ионные каналы, и такие предварительно активизированные нейроны легче проводят слабые сигналы, повышая восприимчивость чувствительных клеток животного.

В сети взаимодействующих клеток возрастает количество качественно различных состояний и возможны очень быстрые переходы между ними в результате действия каких-либо управляющих параметров. Существование нескольких устойчивых состояний открывает возможности реализации эффектов стохастического резонанса и родственных с ним.

Применим подход на основе стохастических уравнений к исследованию таких систем клеток биологических объектов.

Для того, чтобы продемонстрировать действие СР в системе клеток, приведем прежде всего, уравнения для клеточных мембран к уравнению осцилляторов. Существенная разница во временных масштабах калиевых и натриевых процессов позволяет упростить систему до вида, поддающегося качественному анализу [1, 2]. Самым малым характерным временем в системе является время релаксации частиц типа m ($\tau_m \approx 10^{-4}$ с, $\tau_h \approx 5 \cdot 10^{-3}$ с, $\tau_n \approx 10^{-1}$ с), а между значениями равновесных концентраций ионов существует приближенное соотношение

$$\bar{n}(\varphi) + \bar{h}(\varphi) \approx G = \text{const} \quad (G \approx 0,85).$$

Эти свойства концентраций приводят к тому, что можно положить:

$$m \approx \bar{m}(\varphi); \quad h = G - n. \quad (21)$$

С учетом соотношений (21) систему четырех уравнений (1) – (2) для клеточной мембраны можно привести к системе двух уравнений:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{C} \left((\sigma_{Na} \bar{m}^3 (G - n) + \sigma) (\varphi - \varphi_{Na}) + \sigma_{K2} n^4 (\varphi - \varphi_K) + \sigma_1 (\varphi - \varphi_1) \right) + \frac{I_{ex}}{C}; \quad (22)$$

$$\frac{dn}{dt} = (\bar{n}(\varphi) - n) / \tau_n(\varphi). \quad (23)$$

Влияние среды на клеточные мембраны будем описывать дополнительной внешней силой $\xi(t)$ со свойствами белого шума.

Введем вместо непрерывного времени дискретную переменную $t_k = k\tau$, тогда дифференциальные уравнения сводятся к отображению на плоскости (n, φ) :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \frac{\tau}{C} \left((\sigma_{Na} \bar{m}^3 (G - n_k) + \sigma) (\varphi_k - \varphi_{Na}) + \sigma_{K2} n_k^4 (\varphi_k - \varphi_K) + \sigma_1 (\varphi_k - \varphi_1) \right) + \tau \frac{I_{ex}}{C} + \tau \xi(t_k); \quad (24)$$

$$n_{k+1} = n_k + \frac{\tau}{\tau_n(\varphi_k)} (\bar{n}(\varphi_k) - n_k). \quad (25)$$

Полученный алгоритм (24), (25) сводит сложную задачу решения стохастического дифференциального уравнения к простой итерационной процедуре в трехмерном фазовом пространстве с учетом случайной силы в правой части итерационной процедуры. В определенных условиях шум играет конструктивную роль: не подавляет, а усиливает внешние воздействия, а значит, делает систему более устойчивой. Такое поведение носит общий характер для многих биологических объектов.

Новые подходы к математическому описанию влияния стохастических воздействий на колебательные системы

Обычно при исследовании сложных процессов в колебательных системах используется формализм на основе нелинейных дифференциальных уравнений или отображений. В случае воздействия случайных сил и возмущений часто используется подход на основе стохастических дифференциальных уравнений. Однако для сложных систем более эффективно было бы рассмотрение вместо непрерывных моделей эволюции дискретных моделей на основе отображений, но с учетом влияния внешних случайных воздействий. Математическим аппаратом, осуществляющим такой подход, может служить формализм системы итерируемых функций (СИФ) [11]. В своей простейшей версии, СИФ представляет собой множество аффинных преобразований $T := \{T_i |_{i=1, \dots, N}\}$, которые отображают подмножество Ω d -мерного действительного пространства в само себя:

$$T_i(x) = M_i x + Y_i, \quad (26)$$

где M_i – некоторая определенная квадратная матрица и Y_i – определенный вектор. Дополнительным является требование того, чтобы преобразования были сжимающими, т.е. чтобы якобианы $J_i = |\det M_i|$ были меньше 1. Каждому набору преобразований ставится в соответствие вектор вероятности p_i , так что $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Эволюция, описываемая СИФ, происходит следующим образом. Для точки $x_0 \in \Omega$, выбрав с вероятностью p_i преобразование T_i , вычисляем $x_1 = T_i(x_0)$. Итерируя эту процедуру, генерируем на

каждом шаге новую точку в области Ω :

$$x_k = T_{j(k)}(x_{k-1}). \quad (27)$$

Функция $T_{j(k)}$ выбирается случайным образом – в соответствии с данным вероятностным вектором $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ из N преобразований T_i .

Было доказано [11], что последовательность x_0, x_1, x_2, \dots притягивается к подмножеству нулевого объема $F \subset \Omega$, которое (в общем случае) имеет фрактальную структуру. В действительности, $F \subset \Omega$ может быть точно разделено на N кусков F_i , каждый из которых является образом целого аттрактора $F \subset \Omega$ для преобразования T_i :

$$F_i = T_i(F). \quad (28)$$

Каждый F_i как образ полного множества, может быть снова разделен на N кусков:

$$F_{ji} = T_j(F_i) = T_j(T_i(F)). \quad (29)$$

Эта процедура делает понятной самоподобную структуру $F \subset \Omega$, которая может быть охарактеризована фрактальной размерностью D_f . Обычное дискретное преобразование $f: \Omega \rightarrow \Omega$ является предельным случаем СИФ с вырожденным вектором вероятности преобразований $p = (p_i = 1, p_j = 0, j \neq i)$.

Рассмотрим динамику математического осциллятора под периодическим ударным воздействием [12]. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H(t) = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_0^2 q^2 + A \cos \left(q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \right). \quad (30)$$

Известно, что динамика такой системы может быть сведена к рассмотрению двумерного отображения:

$$\bar{I} = I + K \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi}. \quad (31)$$

Это хорошо изученное стандартное отображение (отображение Чирикова) [12], где наличие и развитость хаоса определяется параметром K . Достаточно развитый сепаратрисный хаос имеет место при $K \approx 1$.

Параметр K является (в рамках нашего подхода) “силовой” характеристикой внешнего воздействия на систему. Вид фазовой плоскости системы (31) показан на рис. 1, а.

Рассмотрим теперь случай осциллятора, подвергающегося воздействию аperiodической последовательности импульсов, представленной соответствующей бинарной последовательностью (рис. 2).

Эта последовательность представляет собой “прореженный” вариант последовательности в первом случае. Легко показать, что при этом мы переходим к системе из двух отображений:

$$\bar{I} = I + K \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi}; \quad (A)$$

$$\bar{I} = I; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi}, \quad (B)$$

где отображение (рис. 1, а) имеет место в случае “1”, а (рис. 1, б) – в случае “0”.

Таким образом, мы получаем СИФ, в которой вектор вероятностей отображений определяется структурой внешнего сигнала. На рис. 1 изображен странный аттрактор, полученный в ходе эволюции такой СИФ при $K \approx 0,01$, где бинарная последовательность генерировалась с помощью аттрактора Лоренца.

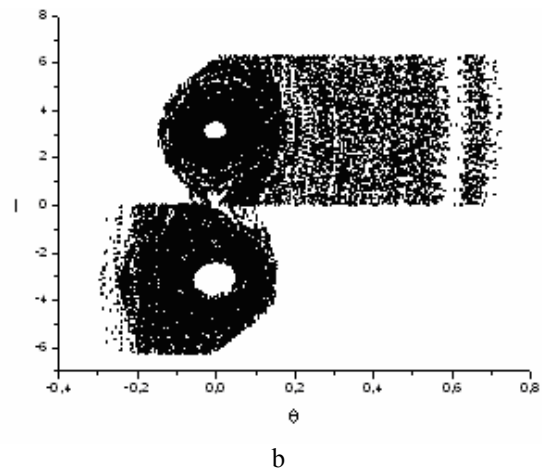
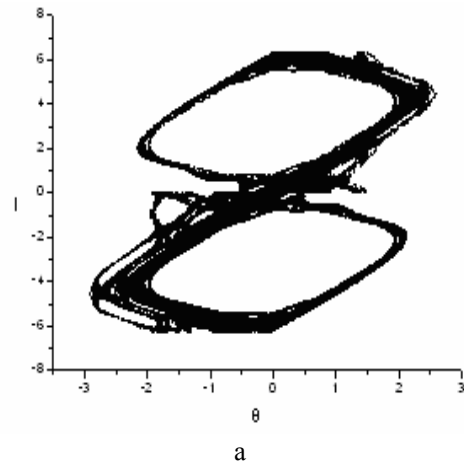


Рис. 1. Вид фазовой плоскости при воздействии на осциллятор: а – периодической последовательности импульсов с достаточно большой интенсивностью ($K \sim 1$); б – сложно-модулированной последовательности импульсов малой амплитуды ($K = 0,01$)

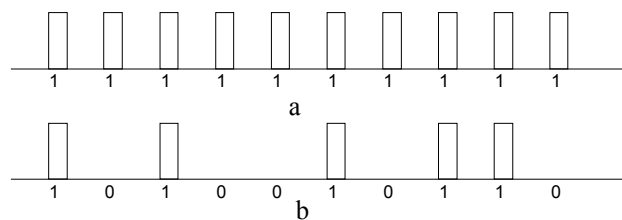


Рис. 2. Импульсные последовательности (наличие импульса обозначено 1, а его отсутствие 0): а – периодическая последовательность импульсов; б – сложно-модулированная (фрактальная) последовательность импульсов

Следует отметить, что в случае периодической последовательности импульсов при таком значении силового параметра никакой хаотический режим возникнуть не может и, таким образом, видно, что в простейшей колебательной системе гораздо более эффективным путем стохастизации является использования аperiodического сложного воздействия, нежели силовой метод, использующий периодические последовательности [14].

Резонанс, индуцированный разнообразием

Оптимальная беспорядочность, заложенная в сложной системе, может резко повысить ее чувствительность к слабым внешним воздействиям. Не исключено, что такой резонанс играет важную роль в био- и экосистемах. Хаотическое воздействие, или попросту шум, обычно считается вредной помехой, препятствующей нормальному функционированию устройств. Физикам, однако, известно, что в определенных ситуациях шум может играть и конструктивную роль. Именно это происходит, например, при стохастическом резонансе, когда шум определенной мощности резко улучшает чувствительность системы к слабым внешним воздействиям. Другим примером такой ситуации является возможность подавления внутренних шумов с помощью внешних.

В статье [15] показан еще один эффект, целиком обязанный созидательной роли беспорядочности, – резонанс, порожденный разнообразием. В этой работе рассмотрен не один (как в стохастическом резонансе), а N элементов, связанных друг с другом в глобальную сеть (то есть каждый связан с каждым). В качестве отдельных элементов рассматриваются положения элементов x_i , которые подчиняются системе динамических уравнений в бистабильном потенциале с гармонической внешней силой, с учетом простейшего взаимодействия между элементами, пропорциональными разнице функций

$$V(x_i) = \frac{C}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i);$$

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i - x_i^3 + a_i + \frac{C}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i) + A \sin(\Omega t),$$

$$i = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Внешняя сила действует на каждый элемент, и если какой-то из них переключается, то он «тянет» за собой другие. Элементы отличаются только константами a_i . Величины параметра a_i удовлетворяют соотношениям $\langle a_i \rangle = 0$, $\langle a_i a_j \rangle = \delta_{ij} \sigma^2$, где величину σ можно назвать параметром разнообразия. Переключение большинства элементов означает, что сеть как целое реагирует на внешнее воздействие. Для характеристики этой реакции введена

средняя величина положения по всей сети:

$$X(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t). \quad (33)$$

Такие сети изучались и раньше, но обычно они конструировались из идентичных элементов, а в [15] рассмотрен отклик сети, если параметры элементов будут слегка различаться (подчеркнем, что средние по всей сети параметры элементов были фиксированы, изменялась лишь величина разброса свойств элементов относительно среднего.) Привнесенное таким образом разнообразие в систему тоже можно представить как некую форму «шума», только на этот раз застывшего, «встроенного» в систему.

Легко видеть, что усреднение системы уравнений (32) приводит к уравнению

$$\frac{dX(t)}{dt} = X - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^3 + A \sin(\Omega t),$$

которое можно упростить, предположив, что отклонения $x_i = X + \delta_i$

от среднего значения X невелики ($\delta_i \ll 1$). Введем

еще одну среднюю величину $M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i^2$. Из этих

соотношений следует уравнение для среднего смещения X :

$$\frac{dX}{dt} = (1 - 3M)X - X^3 + A \sin(\Omega t), \quad (34)$$

описывающее, как такая сеть откликается на слабые периодические внешние воздействия. Анализ уравнения (34) показывает следующее.

Обычная сеть, состоящая из почти одинаковых элементов, откликалась на подпороговые внешние воздействия столь же слабо, как и единичный триггер. Сеть с чрезмерно большим разнообразием тоже плохо отслеживала внешнее возмущение, поскольку ее удерживал от этого слишком большой процент «неподатливых» элементов.

Реакцию системы на внешнее воздействие характеризует величина спектрального усиления $\eta = \frac{4}{A^2} \left| \left\langle e^{i\Omega t} X(t) \right\rangle_t \right|^2$, в определении которого символ $\langle \dots \rangle_t$ означает усреднение по времени. Численный анализ показывает, что при оптимально подобранном разнообразии σ чувствительность сети (η) возрастала в десятки раз. Форма резонанса показана на рис. 3.

Таким образом, вся система при оптимальном разнообразии σ могла чувствовать гораздо более слабые возмущения, чем какой-нибудь один типичный триггер. Это явление было названо резонансом, вызываемым разнообразием. Также, как и в случае стохастического резонанса, ключевую роль здесь играет некая «оптимальная беспорядочность», правда «защитая» в устройство сети.

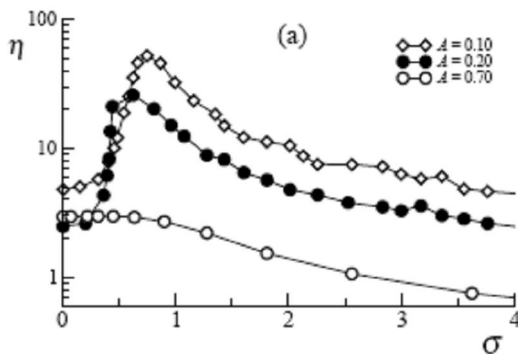


Рис. 3. Форма резонанса

Резонанс, индуцированный разнообразием, имеет место и в биологии, например в системе связанных возбудимых мембран, которые описываются уравнениями Фитц-Хью – Нагумо [16]:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i - \frac{1}{3}x_i^3 - y_i + \frac{C}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i); \quad (35)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = x_i + a_i + A \sin(\Omega t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (36)$$

Так же, как и в одномерной системе (32), система (35) – (36) обладает эффектом индуцированного разнообразием резонанса. Результаты численного анализа резонанса в системе связанных мембран Фитц-Хью – Нагумо показаны на рис. 4.

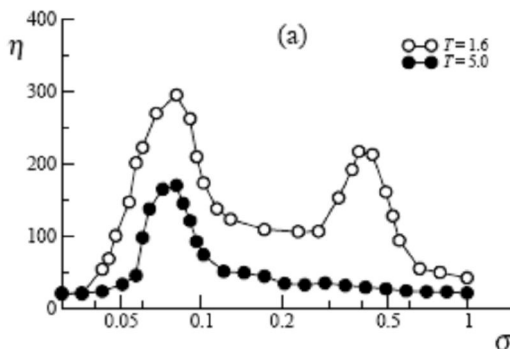


Рис. 4. Результаты численного анализа резонанса в системе связанных мембран Фитц-Хью – Нагумо

Можно сказать, что оптимальная беспорядочность (оптимальное многообразие) как бы «мобилизует» детектирующую систему и позволяет ей генерировать сильный отклик даже на малейшие внешние воздействия. Благодаря разнообразию систем отпадает необходимость накладывать внешний шум на слабый сигнал: оптимальный шум уже присутствует в устройстве сети. В частности, разнообразие в био- и экосистемах могло быть специально настроено биологической эволюцией для максимального усиления чувствительности к слабым внешним изменениям.

Заключение

Стохастический резонанс за 20 лет проделал путь от абстрактного открытия в теоретической фи-

зике до явления, которое не только, как оказалось, широко распространено в природе, но и уже нашло применение в современной медицине. В настоящей статье приведена модель эволюции биологических колебательных систем под воздействием сложных последовательностей импульсов на основе аппарата СИФ. При этом оказывается, что важнейшими характеристиками воздействующих на колебательную систему сигналов является не энергия, а их сложность и энтропия.

Изложенные в статье результаты позволяют надеяться на дальнейшее развитие информационных методов управления биологическими процессами с помощью электромагнитных импульсов малой амплитуды.

Список литературы

1. Hodgkin A.L. and Huxley A.F., *J. Physiol.* 117, 500 (1952).
2. Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сельков Е.Е. *Математическая биология клетки*. – М.: Наука, 1978. – 340 с.
3. Benzi R, Sutera A, Vulpiani A *J. Phys. A* 14 L453 (1981).
4. Nicolis C *Tellus* 34 1 (1982).
5. Kramers H A *Physica* 7 284 (1940).
6. Гардинер К. В. *Стохастические методы в естественных науках*. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
7. Moss F., Bulsara A., Shlesinger M., eds. *Stochastic resonance in physics and biology*, vol. 70 of *J. Stat. Phys.* (1993).
8. *Стохастический резонанс, как индуцированный шумом эффект увеличения степени перехода к порядку* / В.С. Анищенко, А.Б. Нейман и др. // *Успехи физических наук*. – 1999. – Т. 169, № 1. – С. 37-41.
9. Simonotto E et al. *Phys. Rev. Lett.* 78 1186 (1997).
10. Adey W R *Int. J. Neurosci.* 3 271 (1972)
11. Khovanov I. A., Anishchenko V. S. In *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems Near the Millenium* (AIP Conf. Proa, Vol. 411, Eds J B Kadtko, A R Bulsara) (New York: AIP, 1997). – P. 267.
12. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. – М.: Наука, 1988. – 340 с.
13. Massopust P.R. *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*. Academic Press, San-Diego, 1995. – 250 p.
14. Магда И.И., Пащенко А.В., Шаповал И.М., Новиков В.Е. *Технология адаптивного тестирования состояний нелинейных систем, ее приложение к типичным СВЧ устройствам и хаотическая связь* // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2005. – № 11. – С. 47-55.
15. Tessone C., Mirasso C. et all. *Diversity-induced resonance*, arXiv: cond-mat/0605082v1, 3May 2006.
16. FitzHugh R., in H.P.Schwan (ed.), *Biological Engineering*. – New York, 1969. – P. 1.

Поступила в редколлегию 22.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.В. Ермолов, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков.