

УДК 533.51

А.А. Александрова

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

ПЛАЗМЕННЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

На основании интегральных уравнений линейной магнитной гидродинамики рассмотрены модельные краевые задачи обтекания и рассеяния магнитогидродинамического поля на неоднородностях типа сфера и эллипсоид.

интегральное уравнение, функция Грина, поле, эллипсоид, потенциал

Введение

Постановка проблемы и анализ литературы. Объектом исследования данной работы являются магнитогидродинамические (МГД) неоднородности, представляющие собой хорошую теоретическую модель для описания дифракционных явлений реальных, возникающих на практике структур. Можно выделить два принципиально различных направления исследований явлений рассеивания МГД волн на неоднородностях плотности плазмы и магнитного поля и обтекания этих неоднородностей потоками плазмы с точки зрения их возможных приложений. Это, с одной стороны, магнитогидродинамические явления, протекающие в ионосферах Земли и планет, атмосфере Солнца [1], в межпланетной и межзвездной плазме [2], а также явления, напрямую связанные с изучением магнитных полей коллапсирующих масс, природы сверхзвезд и т.д. Именно здесь становится очевидным, что при соприкосновении с неравновесными процессами, приводящими к аномалиям в распределении ионизации, как следствие появляются МГД неоднородности. С другой стороны, это явления, связанные с различными лабораторными плазменными установками [3], в частности, магнитные ловушки для УТС, технологические плазменные устройства и т.д.

Как известно, магнитогидродинамическое описание плазменных процессов представляет особый интерес для явлений, при которых электрическое поле может достигать больших значений. Это может быть как в результате поляризационных явлений, так и в результате индукционных процессов, вызываемыми быстропеременными магнитными полями, взаимодействие которых с плазмой более удобно описывать в терминах магнитной гидродинамики, где напряженность магнитного поля считается величиной первичной, а электрический ток и напряженность электрического поля – вторичными.

Цель статьи. В настоящее время хорошо известна эффективность метода интегральных уравнений макроскопической электродинамики, разработанного Н.А. Хижняком для большого класса задач электродинамики. Практика показала особую целе-

сообразность их применения при исследовании краевых задач на неоднородностях правильной формы, что дало несомненный вклад в развитие современной теории искусственных диэлектриков [3]. В данной работе делается попытка продемонстрировать логическое продолжение применения интегральных уравнений для изучения краевых задач на аналогичных неоднородностях, но уже в магнитогидродинамическом описании.

Основной материал

Интегральная постановка задачи. Рассмотрим общий случай краевой МГД задачи, когда малые возмущения в плазменной среде, интерпретируемой как магнитогидродинамическая, описываются вектором состояния. Вектор состояния $\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}, t)\}$ представляет собой совокупность отклонения скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, магнитного поля $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ от их невозмущенных значений $U_i, \mathbf{B}_i, \rho_i$, задающих МГД состояние среды.

Предположим, что некоторая неоднородность (геометрически однородная область), которая задается параметрами $U_2, \mathbf{B}_2, \rho_2, V_{A2}, V_{S2}$, где последние два представляют собой альфвеновскую и звуковую скорости, имеет объем $V(t)$, в общем случае зависящий от времени. Пусть рассматриваемая неоднородность помещена в неограниченную МГД среду, характеризуемую соответственно параметрами $U_1, \mathbf{B}_1, \rho_1, V_{A1}, V_{S1}$, до возмущения ее падающим полем, которое задается соответствующим вектором состояния $\bar{\Psi}_0(\mathbf{r}, t) = \{\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t), \mathbf{b}_0(\mathbf{r}, t), \rho_0(\mathbf{r}, t)\}$. Тогда интегро-дифференциальное уравнение относительно вектора $\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде свертки функционалов \hat{G} и \mathbf{W} :

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \bar{\Psi}_0(\mathbf{r}, t) + \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') * \mathbf{W}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

т.е. интегральной операции вида

$$\hat{G} * \mathbf{W} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{W}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'.$$

Здесь $\bar{\Psi}_0(\mathbf{r}, t)$ в терминалах теории дифракции падающее (невозмущенное) поле; $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$ – разрывная функция, записанная в классе обобщенных функций, описывающая единым образом МГД среду внутри и вне неоднородности с учетом граничных и начальных условий, при этом следует подчеркнуть, что все характеристики неоднородности содержатся именно в этой функции; $\hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ – функция Грина МГД уравнений свободного пространства, заданного параметрами $\mathbf{U}_1, \mathbf{B}_1, \rho_1, V_{A1}, V_{S1}$.

В [4] получено и полностью описано фундаментальное решение (или в другой терминологии функция Грина) уравнений линейной магнитной гидродинамики в общем случае в движущейся среде ($\mathbf{U}_1 \neq 0$) в диадном представлении. Это представление естественным образом следует из известного факта, что всякий тензор может быть записан в виде суммы трех диад. А функция Грина для данного класса задач и является тензорной функцией положения двух точек: точки наблюдения (\mathbf{r}, t) и точки источника (\mathbf{r}', t') . Из общего вида фундаментального решения можно получить частные случаи МГД функции Грина более удобные для практических приложений. Рассмотрим применение некоторых из них для исследования конкретных краевых задач.

Обтекание МГД потоком сферы. В стационарной магнитной гидродинамике при отсутствии невозмущенного движения среды ($\mathbf{U}_1 = 0$) функция Грина принимает достаточно простой, но характерный для магнитной гидродинамики вид

$$\hat{G} = \hat{\Theta}(\theta, \phi) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (2)$$

т.е. имеет особенность вида $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, а зависимость от полярных углов θ, ϕ радиус-вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ задается матрицей [5], записанной в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1 / B_1$, связанном с выделенным направлением магнитного поля, что подчеркивает анизотропию среды. В этом случае интегральное уравнение (1), выписанное относительно скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, принимает следующий вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2 \right) \text{graddiv} \hat{\Pi}_u - V_{A1}^2 \left[\mathbf{s}_1, \text{rotrot} \left[\mathbf{s}_1 - \frac{B_2}{B_1} \mathbf{s}_2, \hat{\Pi}_u \right] \right], \quad (3)$$

где $\hat{\Pi}_u = \int_{(V)} \mathbf{u}(\mathbf{r}') \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ – МГД потенциал скорости.

С помощью этого уравнения проанализируем задачу обтекания МГД потоком однородного шара радиуса a . Здесь параметры потока – $\mathbf{B}_1, V_{A1}, V_{S1}$, а соответствующие параметры шара – $\mathbf{B}_2, V_{A2}, V_{S2}$

В соответствии с хорошо отработанным алгоритмом исследования интегральных соотношений

(3), собственно интегральным уравнением это соотношение является только для внутренних точек неоднородности (в данном случае шара) и поэтому наибольшую сложность в математическом отношении представляет именно внутренняя задача, на которой коротко и остановимся и при этом получим важный для магнитной гидродинамики результат.

Основной интегральной характеристикой внутреннего поля является МГД потенциал скорости, имеющий в данном случае вид:

$$\bar{\Pi}_u = \int_{(V)} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}') \hat{\Theta}(\theta, \phi)}{R} d\mathbf{r}'. \quad (4)$$

Предположив для начала, что внутреннее поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ постоянно и применив метод Лагранжа [6] получим, что $\bar{\Pi}_u = \mathbf{u} \mathbf{I}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\frac{1}{a^2 V_{A1}^2} \begin{pmatrix} \frac{x^2 - z^2}{3} + y^2 & -\frac{4}{3}xy & -\frac{2}{3}yz \\ -\frac{4}{3}xy & \frac{8}{3}\Omega(x^2 + y^2 + z^2) & -\frac{4}{3}xz \\ -\frac{2}{3}yz & -\frac{4}{3}xz & \frac{x^2 - y^2}{3} + z^2 \end{pmatrix},$$

где $\Omega = V_{A1}^2 / V_{S1}^2 - 1$. Т.е. внутренний потенциал скорости является квадратичной функцией декартовых координат, что аналогично ньютоновскому потенциалу для электродинамических задач [4].

Отсюда сразу же следует, что если невозмущенное поле однородно, т.е. $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{u}_0$, то и внутреннее поле МГД шара также однородно и его можно искать в виде постоянного вектора, компоненты которого легко найти расписав векторные дифференциальные операции в (3). Для краткости эти выражения опустим. Таким образом, можно сделать очень важный для магнитной гидродинамики вывод, что так же, как и в электродинамике и в акустике, в магнитной гидродинамике внутреннее поле сферы, помещенной в однородное внешнее поле, однородно. Но присутствующая во внешней среде магнитная анизотропия, благодаря выделенному направлению невозмущенного магнитного поля $\mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1 / B_1$ делает его существенно анизотропным, т.е. сильно зависящим от направления по отношению к магнитному полю не только внутренней среды, но и внешней.

Обтекание МГД потоком эллипсоида. В качестве другой модели МГД неоднородности рассмотрим трехосный эллипсоид с неоднородными внутренними параметрами, который охватывает широкий класс практически важных неоднородностей, хорошо аппроксимирующих самые разнообразные реальные области. При этом эллиптическая неоднородность объема $(V) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ задается границей, на которой претерпевает скачок звуковая и альфвеновская скорости (второе и третье слагаемые соотношения (3)).

Аналогично предыдущему случаю для нахождения внутреннего поля изучим, используя тот же метод Лагранжа [4], МГД потенциал скорости эллипсоида. Предполагая, что $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ постоянно, придем к тому, что потенциал имеет вид

$$\bar{\Pi}(\mathbf{r}) = \mathbf{u} \parallel \delta_{ij} \parallel_{i,j=1,2,3},$$

для краткости выпишем один из элементов матрицы

$$\begin{aligned} \delta_{22} = & 2\pi \left(1 - \frac{V_{A1}^2}{V_{S1}^2} \right) \{ a_{11} a^2 b^2 (M_{010} + M_{001}) + \\ & + (a_{22} - a_{33}) b^2 (M_{00} - b^2 M_{010}) + a_{33} [b^2 c^2 \cdot \\ & \cdot (M_{000} - b^2 M_{010}) + c^4 (M_{000} - c^2 M_{001})] \}; \\ a_{11} = & \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \right) \frac{1}{a^2}; \\ a_{22} = & \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \right) \frac{1}{b^2}; \\ a_{33} = & \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 \right) \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Как и для большинства статических и квазистатических задач математической физики, объектом которых является эллиптическое тело, внутренний МГД потенциал выражается через табулированные факторы размагничивания $M_{000}, M_{100}, M_{010}, M_{001}$ [7]. Кроме того, каждый элемент матрицы является квадратичной функцией декартовых координат $\delta_{ij} = P_2(x, y, z)$. А так как на потенциал в (3) действует еще оператор дифференцирования второго порядка, то в случае, когда невозмущенное поле однородно $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{u}_0$, внутреннее поле эллипсоида также однородно. Так же как и для сферы характерной чертой внутреннего МГД потенциала скорости является его анизотропия. Она описывается матрицей в базисе, связанном с направлением внешнего магнитного поля и зависит от направления внутреннего магнитного поля.

Исходное же уравнение при этом сводится к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно: u_x, u_y, u_z . Несмотря на громоздкий характер зависимости внутреннего поля эллипсоида от свойств среды и его параметров, «однородные свойства» магнитогидродинамического эллипсоида также легко просматриваются. Но при этом, если поле падающей волны \mathbf{u}_0 имеет составляющие по всем трем осям, то внутреннее поле, оставаясь однородным, вообще говоря, не будет параллельно падающему. Анизотропия среды окружающего пространства значительно усложняет внутреннее поле в эллипсоиде. Теперь анизотропия внутренней среды зависит не только от внутреннего магнитного поля, но и от ориентации эллипсоида и магнитного поля в окружающей среде.

Чтобы получить качественное представление о поле внутри эллипсоида в зависимости от ориента-

ции его по отношению к внешнему магнитному полю, рассмотрим несколько численных примеров.

На графиках рис. 1 представлены зависимости относительной u_y/u_{0y} от величины отношения полуосей эллипсоида b/a при неизменной третьей ($c/a = \text{const}$). При стремлении b/a к единице величина отношения u_y/u_{0y} плавно уменьшается по абсолютной величине, т.е. при вырождении эллипсоида в диск поле стабилизируется, оставаясь практически неизменным. На графиках рис. 2 представлены зависимости u_y/u_{0y} от b/a при $b=c$ и различных скоростях звуковых и альфвеновских волн. Из них следует, что не при всех соотношениях параметров решения имеют столь плавный характер. При некоторых значениях отношение u_y/u_{0y} неограниченно возрастает, испытывая разрыв.

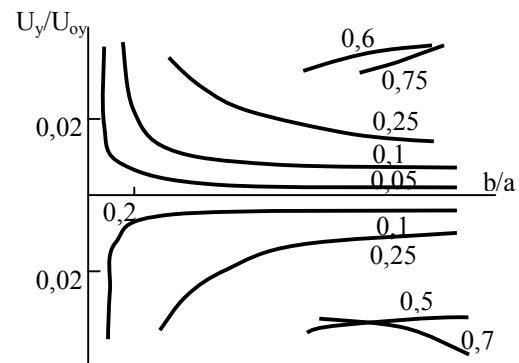


Рис. 1. Зависимость U_y / U_{0y} от отношения полуосей эллипсоида b/a при указанных значениях c/a (выше оси абсцисс $V_{S1}^2 - V_{S2}^2$ – больше, ниже – меньше нуля)

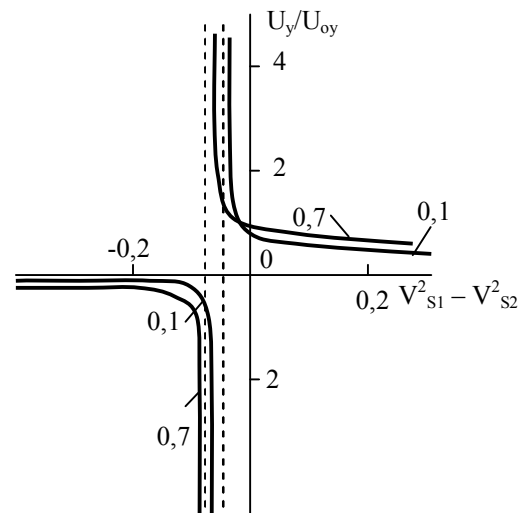


Рис. 2. Зависимость U_y / U_{0y} от $V_{S1}^2 - V_{S2}^2$ при значениях b/a ($b = c$), указанных на рисунке

Из рис.3 следует, что при определенных условиях внешний поток скоростей возбуждает неограниченно растущие скорости потока соответствующих компонент внутреннего поля. Можно интерпретировать это как условие существования неустойчивых эллипсоидальных МГД конфигураций.

Теперь перейдем к внешнему полю, которое с помощью квадратур (интегральные слагаемые справа

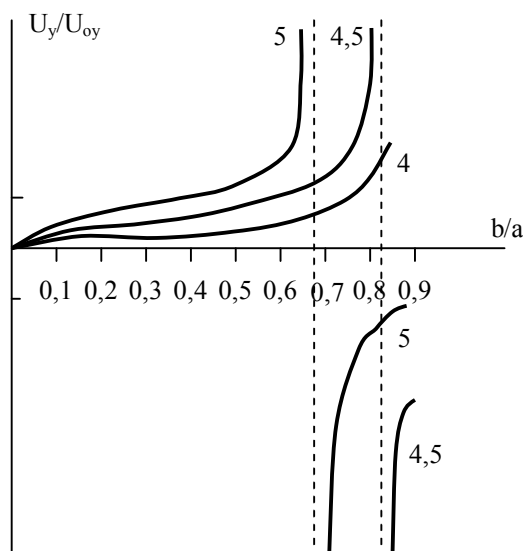


Рис. 3. Зависимость U_y/U_{0y} от b/a при $V_{s1}^2 - V_{s2}^2$ указанных на рисунке

в (3)) выражается через найденное уже внутреннее поле. Отсюда следует, что полное поле скоростей вне неоднородности $\mathbf{u}_f(\mathbf{r})$ можно представить как сумму невозмущенного поля $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ и поля $\mathbf{u}_d(\mathbf{r})$, возникшего в результате возмущения, создаваемого эллипсоидом

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_d(\mathbf{r}),$$

причем для нахождения возмущенного поля $\mathbf{u}_d(\mathbf{r})$ необходимо найти внешний МГД потенциал скорости, который удастся свести к виду

$$\bar{\Pi}_u(\mathbf{r}) = \mathbf{u} \int_{(\Omega)} \hat{\Theta}(\theta, \phi) \frac{K}{r^2} \sqrt{K^2 - I} d\omega;$$

$$I = \alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 + \gamma^2/c^2;$$

$$K = \alpha x/a^2 + \beta y/b^2 + \gamma z/c^2;$$

$$L = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2;$$

$$\alpha = \sin \theta \cos \phi; \beta = \cos \theta; \gamma = \sin \theta \sin \phi -$$

координаты точки на сфере единичного радиуса.

Метод Лагранжа, успешно применяемый в аналогичных задачах электродинамики благодаря теореме взаимности Айвори [6], в магнитной гидродинамике не срабатывает, т.к. область интегрирования (Ω) уже существенным образом зависит от положения точки наблюдения в пространстве. Поэтому ограничимся анализом поля в дальней зоне.

Учитывая, что в дальней зоне $r \gg \max\{a, b, c\}$,

$\theta \approx \tilde{\theta}, \phi \approx \tilde{\phi}$, где $r, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}$ – сферические координаты точки наблюдения, находим, что внешний потенциал принимает вид

$$\bar{\Pi}_u(\mathbf{r}) = \mathbf{u} (4/3) \pi abc \hat{\Theta}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) / r = \hat{q} \mathbf{u}_0 / r,$$

где $\hat{q} = (4/3) \pi abc \hat{A} \hat{\Theta}$ – матрица обтекания эллипсоида.

В итоге поле в дальней зоне можно представить соотношением

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{r}) = \left[1 + (1/r^3) \hat{P}(\theta, \phi) \right] \mathbf{u}_0(\mathbf{r}),$$

где $\hat{P}(\theta, \phi)$ – некоторый оператор, который по аналогии с электродинамикой задачей можно назвать оператором (амплитудой) обтекания; он записывается в виде матрицы и является достаточно сложным физическим понятием. Его можно истолковать как оператор, описывающий возмущение, вносимое неоднородностью, которое убывает в дальней зоне, как $1/r^3$, и существенно зависит от точки наблюдения, что отражено на рис. 4, 5.

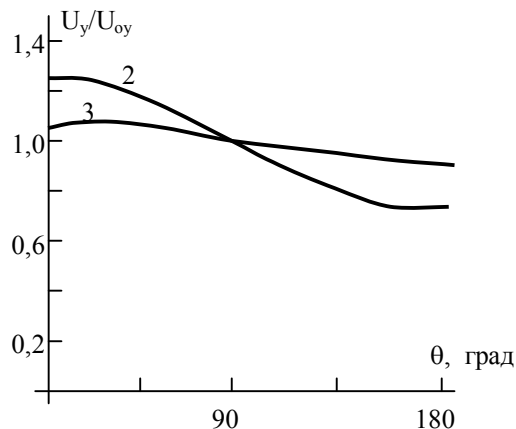


Рис. 4. Зависимость U_y/U_{0y} от угла θ в дальней зоне полуплоскости $\phi = 0$ при r , указанном на рисунке

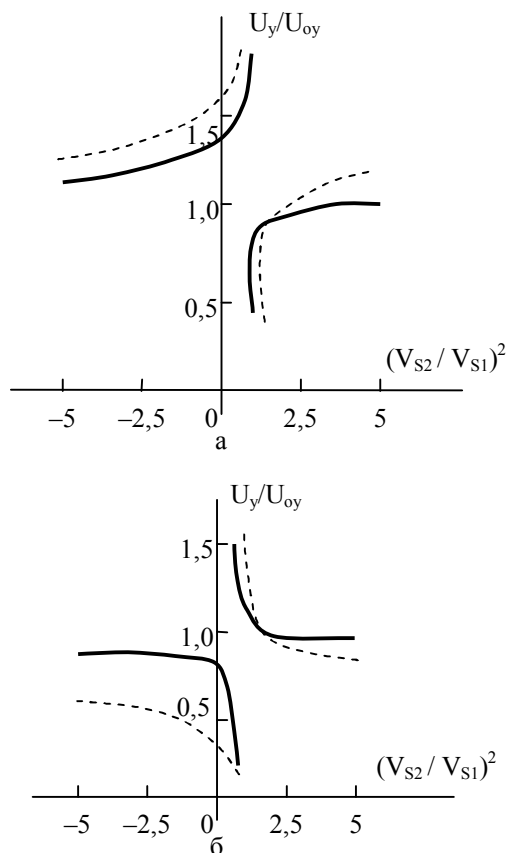


Рис. 5. Зависимость U_y/U_{0y} в дальней зоне от величины $(V_{s2}/V_{s1})^2$ при $\theta = 0^\circ$ (а) и 180° (б); $r = 2$ (---), $r = 3$ (—)

Рассмотрим МГД потенциал различных предельных фигур, которые можно получить из эллипсоида вращения $a = c$. Пусть эллипсоид вращения имеет вид тонкого вытянутого цилиндра $a = c \ll b$, тогда МГД потенциал в направлении магнитного поля $\hat{\Pi}(\mathbf{r})$ будет иметь вид:

$$-\frac{\mathbf{u}\pi r^2 a^2}{V_{A1}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(V_{A1}^2/V_{S1}^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а в направлении, перпендикулярном магнитному полю, соответственно:

$$\frac{\mathbf{u}r^2}{V_{A1}^2} \begin{pmatrix} b^2 \cos 2\phi/4 & 0 & \sin 2\phi/8 \\ 0 & (1 - V_{A1}^2/V_{S1}^2)(2b^2 - 1)/2 & 0 \\ \sin 2\phi/8 & 0 & -b^2 \cos 2\phi/4 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что рассеивающей неоднородностью является сжатый эллипсоид вращения (диск) $a = c \gg b$, тогда МГД потенциал в направлении магнитного поля равен

$$\frac{\mathbf{u}\pi r^2 (b^2 - ab\pi/2)}{V_{A1}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(V_{A1}^2/V_{S1}^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а в направлении, перпендикулярном магнитному полю

$$-\frac{\mathbf{u}r^2}{V_{A1}^2} \begin{pmatrix} \pi ab\chi_1/16 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - V_{A1}^2/V_{S1}^2)\pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi ab\chi_2/16 \end{pmatrix};$$

$$\chi_1 = 1 + 2 \sin^2 \phi, \chi_2 = 1 + 2 \cos^2 \phi.$$

Анализ МГД потенциала скорости в ближней зоне можно продемонстрировать, если вернуться к обтекаемой неоднородности, имеющей геометрию шара. В этом случае МГД потенциал в ближней зоне примет вид:

$$\bar{\Pi}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}r^2 \parallel l_{ij} \parallel_{i,j=1,2,3},$$

где $l_{ij} = l_{ij}(\theta, \phi)$.

Для наглядности на рис. 6 представлена зависимость одного из элементов, а именно, l_{22} от угла θ .

Рассеяние на МГД шаре произвольного радиуса. Рассмотрим еще одну модель неоднородности, вписывающуюся в рамки магнитогидродинамического описания. Пусть в идеальной однородной жидкости, характеризуемой плотностью ρ_1 и адиабатической сжимаемостью β , находится шар радиуса a , в котором имеется жидкость с плотностью ρ_2 и той же сжимаемостью β . Внутри этого шара имеется постоянное магнитное поле \mathbf{B} . Величины $\rho_1, \beta, \mathbf{B}$ предполагаются таковыми, что неоднородность находится в равновесии с окружающей средой.

При отсутствии магнитного натяжения и давления во внешней среде функция Грина в соотношениях (1) принимает свой частный вид, характерный именно для акустических задач:

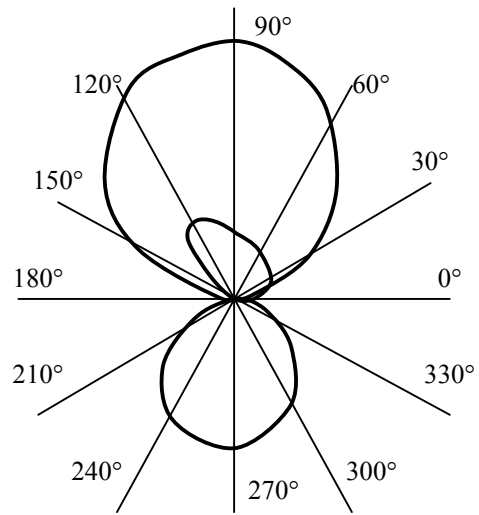


Рис. 6. Зависимость, l_{22} от угла θ .

$$\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi V_{S1}^2} \left[\hat{\varepsilon} - \frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \nabla \times \nabla \times \hat{\varepsilon} \right] \times \exp[-i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/V_{S1}]/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

где $\hat{\varepsilon}$ – единичный аффинор, а временная зависимость предполагается как $\exp(i\omega t)$.

В данной постановке первичным является поле скоростей, относительно которого интегральные соотношения (1) приобретают вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \left(k_1^2 - \text{rotrot} \right) \times \int_{(V)} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\exp[-ik_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{u}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \quad (5)$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\rho_1 \beta},$$

а поле давлений $p(\mathbf{r})$ и возмущенное магнитное поле $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ являются вторичными, причем магнитное поле и его возмущение локализованы в объеме (V) .

Продолжая цепочку классических работ по рассеянию на шаре, начатую G. Mie и P. Debye, систематизированную Дж.А. Стрэттоном и Р. Ньютоном и в дальнейшем обобщенную на случай анизотропной среды Н.А.Хижняком (все ссылки имеются в монографии [3]) и используя основную идеологию этих работ, внутренне поле скоростей, согласно интегральному уравнению (5) примет вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sum_{l=|J-1|}^{J+1} u_{J,l}^M(\Gamma) \bar{Y}_{J,l}^M(\bar{\Omega}), \quad (6)$$

где $j_l(\Gamma)$ – сферическая функция Бесселя порядка l , $\bar{Y}_{J,l}^M$ – векторные сферические функции; образующие полную ортогональную систему функций на поверхности (Ω) единичной сферы; $\bar{\Omega} = \mathbf{r}/r$ – вектор на этой поверхности; $\Gamma = \omega \sqrt{\rho_2 \beta}$.

Согласно [8] амплитудные множители разложения внутреннего поля имеют вид:

$$u_{J,J-1}^M = \frac{(-1)^{J+1} u_{0,J+1}^M (\Gamma^2 - k_1^2) (2J+1) \rho_1}{2k_1^3 a^2 D_J (J+1) (\rho_1 - \rho_2)} ;$$

$$u_{J,J}^M = 0; \quad u_{J,J+1}^M = \frac{(-1)^{J+1} u_{0,J+1}^M (\Gamma^2 - k_1^2) (2J+1) \rho_1}{2k_1^3 a^2 D_J (J+1) (\rho_1 - \rho_2)} ;$$

$$D_J = \Gamma j_J'(\Gamma a) h_J^{(2)}(k_1 a) - k_1 h_J^{(2)'}(k_1 a) j_J(\Gamma a),$$

где $h_J^{(2)}(k_1 a)$ – сферическая функция Ханкеля второго рода.

При этом отклонение магнитного поля от его равновесного значения или, другими словами, возмущение магнитного поля будет иметь вид:

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{i\omega} \sum_{J,M,l} u_{Jl}^M j_l(\Gamma r) \bar{\Omega} \times \bar{Y}_{jl}^M(\bar{\Omega}) \times \mathbf{B}.$$

С помощью квадратур по известному внутреннему полю находится рассеянное поле.

Так же как и в электродинамике [3], интерес представляет анализ возможных резонансов, которые могут возникнуть при следующем условии

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \frac{J_{1-1/2}(\Gamma a)}{J_{1+1/2}(\Gamma a)} = \frac{J_{1-1/2}(k_1 a)}{J_{1+1/2}(k_1 a)}. \quad (7)$$

Выводы

Из (8) видно, что резонансные частоты зависят от размера сферы, от гидродинамических характеристик сред и от порядкового номера, причем в резо-

нансном случае поле в волновой зоне определяется не всей суммой (6), а лишь отдельными слагаемыми, что значительно облегчает анализ рассеянного поля.

Список литературы

1. Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика. – М.: Мир, 1985. – 589 с.
2. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. – М.: Мир, 1967. – 260 с.
3. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. – К.: Наук. думка, 1986. – 278 с.
4. Александрова А.А. Фундаментальное решение уравнений линейной магнитной гидродинамики в движущейся среде // Журнал технической физики. – 2001. – Т. 71, вып. 7. – С. 1-6.
5. Александрова А.А., Хижняк Н.А. Краевые задачи магнитной гидродинамики. – Х.: Тест-Радио ЛТД, 1993. – 230 с.
6. Сретинский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. – М.-Л.: ОГИЗ, 1949. – 317 с.
7. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. – М.: Атомиздат, 1976. – 144 с.
8. Александрова А.А., Хижняк Н.А. Рассеяние на МГД шаре произвольного радиуса, находящемся в гидродинамической среде // Физика плазмы. – 1991. – Т. 17, вып. 11. – С. 1303-1309.

Поступила в редколлегию 27.11.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.