

УДК 519.86:347.464

С.В. Гадецкая, В.Ю. Дубницкий

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ ДИВИДИРИАЛЬНОГО И МУЛЬТИГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МГНОВЕННОГО ТЕМПА РОСТА НЕМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Приведены сведения об основных определениях дивидир и мультигралов первого и второго рода. Показано, что экономическим содержанием дивидир являются функции мгновенного темпа роста и эластичности. Вычислены соответствующие выражения для основных функций роста.

кривая роста, темп роста, эластичность функции, дивидира, мультиграл

Введение

Анализ литературы. В экономической теории хорошо известны задачи определения среднего темпа роста, определения среднего уровня инфляции и построения функции эластичности [1].

Для положительной монотонной конечной последовательности средний темп роста

$$T = \sqrt[n-1]{y_n / y_1}. \quad (1)$$

Средний темп роста подпоследовательности $Y_1 \subset Y$, $Y_1 = \{y_j\}$, $j = \overline{k, m}$; $1 \leq k < m \leq n$ определяют по формуле

$$T_1 = \sqrt[m-k]{y_m / y_k}. \quad (2)$$

Среднегодовой уровень инфляции определяют по формуле [2]:

$$I = \prod_{j=1}^{12} \left(\frac{l_j}{100} + 1 \right), \quad (3)$$

где l – уровень инфляции в j -м месяце, $j = \overline{1, 12}$.

Известно, что для любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ эластичность $E_x(y)$ определяют по формуле

$$E_x(y) = \frac{y'(x)}{y} x. \quad (4)$$

Невзирая на то, что, на первый взгляд, это достаточно разные задачи, их внутренняя общность показана в работах [2, 3].

В работе [2] доказано, что для определенной на $[a, b]$ непрерывной функции имеет место условие, которое названо дивидирой первого рода $V(x)$, а именно:

$$V(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right]^{1/\Delta x} = \exp \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]. \quad (5)$$

Операция, которая дает возможность по дивидире первого рода определить ее первообразную, названа мультигралом первого рода. Определенный на интервале $[a, b]$ мультиграл первого рода вычисляют по формуле

$$nf(x) dx \Big|_a^b = \exp \int_a^b \ln f(x) dx. \quad (6)$$

Дивидирой второго рода $w(x)$ названа функция

$$w(x) = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln f(xh) - \ln f(x)}{\ln h} = \frac{xf'(x)}{f(x)}. \quad (7)$$

Сравнивая выражения (4) и (7), можно сделать вывод, что эластичность $E_x(y)$ функции $w(x)$ есть дивидира второго рода.

Определенный на интервале $[a, b]$ мультиграл первого рода вычисляют так:

$$nf(x) dx = \exp \int_a^b \ln f(x) dx, \quad (8)$$

определенный мультиграл второго рода вычисляют по формуле

$$n\delta(x)^{f(x)} \Big|_a^b = \exp \left[\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right]. \quad (9)$$

Возможная экономическая интерпретация этих математических объектов согласно с работами [2, 3] такая.

Дивидира первого рода – это средний темп роста на бесконечно малом интервале времени $[t_1, t_2]$ $t_1 < t_2$; $\Delta t = t_2 - t_1 < \varepsilon_1$ $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$V(t) = t_2 - t_1 \sqrt[t_2 - t_1]{\frac{y(t_2)}{y(t_1)}}. \quad (10)$$

Дивидира второго рода в соответствии с её определением имеет экономический смысл эластичности функции.

В таком случае, по мнению автора работы [2], определенный мультиграл второго рода дает возможность вычислить зависимость предложения от цены по известным коэффициентам эластичности предложения от цены.

В работе [3] показано, что натуральный логарифм относительной меры отклонения фактической скорости от эталонной совпадает с дивидирой второго рода.

Постановка задачи. Целью данной работы является вычисление дивидир первого и второго рода, мультигралов первого и второго рода для основных функций роста, принятых в эконометрии [1] без ограничений на наличие свойства монотонности функций.

Изложение результатов

В табл. 1 приведен перечень основных функций роста, которые исследованы в работе.

Таблица 1

Основные типы кривых роста

№№	Тип кривой	Определение кривой
1	Экспоненциальная функция	$y_1 = ab^x$
2	Степенная функция	$y_2 = ax^b$
3	Обратная функция	$y_3 = a + b \frac{1}{x}$
4	Линейная функция	$y_4 = a + bx$
5	Квадратичная функция	$y_5 = b_0 + b_1x + b_2x^2$
6	Модифицированная экспонента	$y_6 = ab^x + c$
7	Кривая Гомперца, тип I	$y_7 = \exp(ab^x + c)$
8	Логистическая кривая	$y_8 = \frac{1}{ab^x + c}$
9	Логарифмическая парабола	$y_9 = ab^x c x^2$
10	Кривая Перла-Рида	$y_{10} = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$
11	Кривая Гомперца, тип II	$y_{11} = a \exp(-be^{-cx})$

Сравнивая условия (5) и (7), можно видеть, что базовым для вычисления дивидир первого и второго рода является отношение

$$z(x) = f'(x) / f(x).$$

Результаты вычислений дивидир первого и второго рода приведены в табл. 2, 3 соответственно.

При вычислении дивидиры первого рода для кривой Перла-Рида следует иметь в виду следующее:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{1 + be^{-cx}} \right) = \frac{abc \exp(-cx)}{(1 + b \exp(-cx))^2}. \quad (11)$$

Для удобства последующих вычислений умножим и разделим выражение (11) на величину $\exp(2cx)$ и получим выражение, записанное в табл. 2.

Вычисления мультиинтегралов первого рода (M1) выполняют в соответствии с формулой (6). Базовым для этой процедуры является выражение:

$$I_k^{(1)} = \int \ln f_k(x) dx, \quad k = \overline{1; 11}. \quad (12)$$

В условии (12) номера $k = \overline{1; 11}$ совпадают с нумерацией выражений в табл. 1.

Для экспоненциальной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_1^{(1)} = \int \ln(ab^x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(ab^x)^2}{\ln b}. \quad (13)$$

Для степенной функции выражение для M1 будет таким:

Таблица 2
Дивидиры первого рода для основных типов кривых роста

№№	Тип кривой	Дивидира первого рода V(x)
1	Экспоненциальная функция	b
2	Степенная функция	$\exp(b/x)$
3	Обратная функция	$\exp\left(-\frac{b}{x(ax+b)}\right)$
4	Линейная функция	$\exp\left(\frac{b}{a+bx}\right)$
5	Квадратичная функция	$\exp\left(\frac{b_1 + 2b_2x}{b_0 + b_1x + b_2x^2}\right)$
6	Модифицированная экспонента	$\exp\left(\frac{ab^x \ln b}{ab^x + c}\right)$
7	Кривая Гомперца, тип I	$\exp(ab^x \ln b)$
8	Логистическая кривая	$\exp\left(-ab^x \ln b / (ab^x + c)^2\right)$
9	Логарифмическая парабола	$\exp(\ln b + 2x \ln c)$
10	Кривая Перла-Рида	$\exp\left(\frac{bc}{e^{cx} + b}\right)$
11	Кривая Гомперца, тип II	$\exp(bce^{-cx})$

$$I_2^{(1)} = \int \ln(ab^x) dx = x \ln(ax^b) - bx. \quad (14)$$

Для обратной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_3^{(1)} = \int \ln\left(a + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{b}{a} |y_3| - \frac{b}{a} \ln\left|-\frac{b}{x}\right| + x \ln|y_3|, \quad (15)$$

в условии (15) принято, что согласно с табл. 1

$$y_3 = a + b/x.$$

В последующем особенность обозначения y_k ($k = \overline{1; 11}$) специально не оговаривается.

Для линейной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_4^{(1)} = \int \ln(a + bx) dx = \frac{y_4 \cdot \ln|y_4|}{b} - x. \quad (16)$$

Для квадратичной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_5^{(1)} = \int \ln(b_0 + b_1x + b_2x^2) dx = x \ln|y_5| - 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1}{b_2} + \ln|y_5| + \frac{4b_0}{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}} \arctg f - \frac{b_1^2}{b_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}} \arctg f,$$

$$\text{где } f = \frac{b_1 + 2b_2x}{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}}. \quad (18)$$

Таблица 3

Дивидеры второго рода (эластичности)
основных типов кривых роста

№№	Тип кривой	Дивидера второго рода w(x)
1	Экспоненциальная функция	$x \ln b$
2	Степенная функция	b
3	Обратная функция	$-\frac{b}{ax+b}$
4	Линейная функция	$\frac{bx}{a+bx}$
5	Квадратичная функция	$\frac{x(b_1+2b_2x)}{b_0+b_1x+b_2x^2}$
6	Модифицированная экспонента	$\frac{xab^x \ln b}{ab^x+c}$
7	Кривая Гомперца, тип I	$x \exp(ab^x \ln b)$
8	Логистическая кривая	$-\frac{xab^x \ln b}{(ab^x+c)^2}$
9	Логарифмическая парабола	$x(\ln b + 2x \ln c)$
10	Кривая Перла-Рида	$\frac{xbc}{e^{cx}+b}$
11	Кривая Гомперца, тип II	$xbce^{-cx}$

Для модифицированной экспоненты выражение для M1 будет таким:

$$I_6^{(1)} = \int \ln(ab^x + c) dx = \frac{\ln|c|}{\ln|b|} \ln \left| a \cdot \frac{b^x}{c} \right| - \frac{1}{\ln|b|} \operatorname{di} \log \left[\frac{ab^x}{c} \right]. \quad (19)$$

В условии (19) символ $\operatorname{di} \log(z)$ значит специальную функцию – дилогарифм [4].

В нашем случае дилогарифм будем рассматривать как функцию

$$\tilde{Li}_2(x) = \operatorname{Re} Li_2(x) = \begin{cases} Li_2(x), & x \leq 1; \\ Li_2(x) + i\pi \ln x, & x \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Для вычисления дилогарифмической функции в нашем случае нужно использовать такие соотношения [5]:

$$Li_2(x) + Li_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \cdot \ln(1-x), \quad \frac{1}{2} < x < 1; \quad (21)$$

$$\tilde{Li}_2(x) + \tilde{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 x, \quad 0 < x < \infty. \quad (22)$$

Более детальные сведения о способах вычисления функции $\operatorname{di} \log(z)$ приведены [6, 7].

Для кривой Гомперца первого типа выражение для M1 будет таким:

$$I_7^{(1)} = \int \ln \left(\exp(ab^x + c) \right) dx = x \ln |y_7| + \frac{ab^x}{\ln|b|} - axb^x. \quad (23)$$

Для логистической кривой выражение для M1 будет таким:

$$I_8^{(1)} = \int \ln \left| \frac{1}{ab^x + c} \right| dx = \frac{1}{\ln|b|} \left[\ln \left| \frac{1}{c} \right| \cdot \ln \left| \frac{c}{ab^x + c} \right| - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{ab^x + c} \right)^2 + \operatorname{di} \log \left| \frac{c}{ab^x + c} \right| \right) \right]. \quad (24)$$

Для логарифмической параболы выражение для M1 будет таким:

$$I_9^{(1)} = \int \ln(ab^x c^{x^2}) dx = x \ln |ab^x c^{x^2}| - \frac{x^2 \ln|b|}{2} - \frac{2x^3 \ln|c|}{3}. \quad (25)$$

Для кривой Перла-Рида выражение для M1 будет таким:

$$I_{10}^{(1)} = \int \ln \left| \frac{a}{1+be^{cx}} \right| dx = \frac{1}{2c} \ln(y_{10})^2 - \frac{\ln|a|}{c} \times \times \ln \left| \frac{y_{10}-a}{a} \right| + \frac{1}{c} \operatorname{di} \log \left| \frac{1}{1+b \exp(-cx)} \right|. \quad (26)$$

Для кривой Гомперца второго типа выражение для M1 будет таким:

$$I_{11}^1 = \int \ln |a \exp(-be^{-cx})| dx = \frac{b}{c} \exp(-cx) + x \ln|a|. \quad (27)$$

Как пример использования приведенной методики рассмотрим кривые мгновенного роста (дивидеры первого рода), которые были получены для регрессионных моделей динамики авиационного производства в СССР (А), США (Б), Японии (В), Германии (Г) [8]. Уравнения кривой роста $y^{(u)}(t)$, $u = \{A, B, B, \Gamma\}$ будут такими:

$$y^{(a)}(t) = \exp(-2,5850+0,0032t^2);$$

$$y^{(b)}(t) = \exp(-3,7711+0,0041t^2);$$

$$y^{(B)}(t) = \exp(-4,7412+0,0040t^2);$$

$$y^{(r)}(t) = \exp(-5,2450+0,0054t^2).$$

Для первых трех стран кривая роста имеет вид:

$$y(t) = \exp(a+bt^2),$$

для четвертой

$$y(t) = (a+bt^2)^2.$$

Тогда дивидера первого рода для первых трех функций имеет вид:

$$V(t) = \exp \frac{2bt \exp(a+bt^2)}{\exp(a+bt^2)} = \exp(2bt).$$

Для четвертой страны дивидера первого рода будет такой:

$$V(t) = \exp \frac{4bt(a+bt^2)}{(a+bt^2)^2} = \exp \left(\frac{4bt}{a+bt^2} \right).$$

Графики, которые отвечают этим уравнениям, приведены на рис. 1.

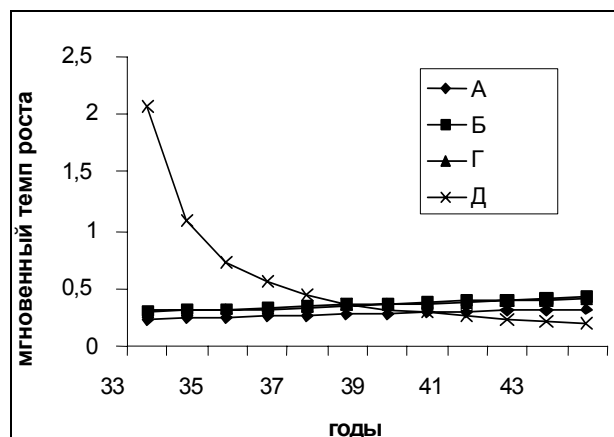


Рис. 1. График уравнений кривых роста

Из этого графика можно сделать вывод, что страны А, Б, В имели приблизительно одинаковый темп роста, страна Г все время снижала темп выпуска продукции.

Вычисления мультигралов второго рода (M2) выполняют в соответствии с формулой (9). Базовым для этой процедуры является выражение

$$I_k^{(2)} = \int \frac{f(x)}{x} dx. \quad (28)$$

В условии (12) номера $k = \overline{1;11}$ также совпадают с нумерацией выражений в табл. 1. Неопределенный мультиграл второго рода будет определен согласно с работой [2] так:

$$n\delta \cdot x^{f(x)} = \exp \int \frac{f(x)}{x} dx. \quad (29)$$

Дальше приведем результаты вычисления интегралов вида (12) для функций, указанных в табл. 1.

Для экспоненциальной функции интеграл

$$I_1^{(2)} = \int \frac{ab^x}{x} dx = -aE_1(-x \ln b). \quad (30)$$

Для степенной функции интеграл

$$I_2^{(2)} = \int \frac{ax^b}{x} dx = \frac{a}{b} x^b. \quad (31)$$

Для обратной функции интеграл

$$I_3^{(2)} = \int \left(a + \frac{b}{x}\right) \frac{1}{x} dx = a \ln x - \frac{b}{x}. \quad (32)$$

Для линейной функции интеграл

$$I_4^{(2)} = \int \frac{a+bx}{x} dx = a \ln x + bx. \quad (33)$$

Для квадратичной функции интеграл

$$I_5^{(2)} = \int \frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x} dx = b_1x + b_2 \frac{x^2}{2} + b_0 \ln x. \quad (34)$$

Для модифицированной экспоненты интеграл

$$I_6^{(2)} = \int \frac{ab^{x+c}}{x} dx = -aE_1(-x \ln b) + c \ln x. \quad (35)$$

Для логистической кривой интеграл

$$I_8^{(2)} = \int \frac{dx}{x(ab^x+c)} = (-1) \left(\frac{1}{x^2(ab^x+c)} + \frac{ab^x \ln b}{x(ab^x+c)^2} \right). \quad (36)$$

Для кривой Гомперца первого типа, логарифмической параболы, кривой Перла-Рида, кривой Гомперца второго типа интегралы вида (29) в явном виде получить не удалось.

В выражениях (30) и (35) функция $E_1(x)$ – интегральная показательная функция [5]. Для $x > 0$, а в нашем случае это условие выполняется по содержанию смысла задачи:

$$E_1(x) = -C - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}, \quad (37)$$

где C – постоянная Эйлера, $C=0,5772\dots$. В работе [9] отмечено, что суммирование ряда (35) можно прекратить при числе членов ряда $N = 100$.

Выводы

1. Приведены сведения о дивидирах первого и второго рода и мультигралах первого и второго рода для основных типов кривых роста, принятых в эконометрии.

2. Приведен пример использования введенных понятий для анализа темпов роста авиационного производства.

Список литературы

1. Лук'яненко І.Г., Красникова Л.І. Економетрика. – К.: Знання, 1998. – 494 с.
2. Литвин О.М. Дивідиральні та мультигральні числення. – К.: Наук. думка, 2006. – 144 с.
3. Котляр В.Ю. Об относительной скорости изменения функции // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 5. – С. 160-165.
4. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторе. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
5. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1984. – 598 с.
6. Mornis R. The dilogarism function of real argument // Math. Comput. – 1979. – V. 33, № 146. – P. 778-787.
7. Lewin L. Dilogarism and associated functions. – London: Macdonald, 1958. – 353 p.
8. Дубницький В.Ю., Ходирев О.І. Економетричний аналіз виробництва літаків у країнах – основних учасниках Другої Світової війни // Системи озброєння і військова техніка. – 2007. – № 1 (9). – С. 87-91.
9. Цирлинг Ш.Е. Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы. – М.: Радио и связь, 1988. – 272 с.

Поступила в редколлегию 27.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Кононенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.