УДК 535.81

Е.Д. Прилепский

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ЧАСТОТНО-ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДВУЗРАЧКОВОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для двузрачковой некогерентной оптической системы получено решение задачи оптимальной аппроксимации частотно-передаточной функции достаточно общего вида. Оптимальные фазовые и зрачковые функции определены методом последовательных приближений.

некогерентная оптика, пространственная фильтрация

Введение

Использование некогерентной оптики в системах оптической обработки информации ограничивается тем, что функция рассеяния точки (ФРТ) таких систем является действительной положительной функцией. Частотно – передаточная функция (ЧПФ) некогерентной оптической системы $\tau(\boldsymbol{\omega}) = \tau(\omega_x,\omega_y)$ имеет максимум на нулевой частоте и $|\tau(\boldsymbol{\omega})| \le \tau(0)$. Таким образом, некогерентная система пространственной фильтрации является фильтром низких частот. Это не позволяет выполнять такие операции, как обратная свертка, полосовая фильтрация, дифференцирование и другие, требующие двухполярную ФРТ и ЧПФ с провалом на низких частотах [1, 2]. Для преодоления этих ограничений в [3] предложен метод двузрачковой некогерентной пространственной фильтрации. В соответствии с этим методом представим двухполярную ФРТ $S(\mathbf{x})$ в виде суммы положительной $S_+(\mathbf{x})$ и отрицательной $S_-(\mathbf{x})$ частей

$$S(\mathbf{x}) = S_+(\mathbf{x}) - S_-(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где обе функции $S_+(\mathbf{x})$ и $S_-(\mathbf{x})$ – положительны; $\mathbf{x}$ – обобщенная координата в плоскости изображений. Функции $S\pm(\mathbf{x})$ связаны со зрачковыми функциями (ЗФ) $P\pm(\boldsymbol{\rho})$ соотношениями

$$S\pm(\mathbf{x}) = |F[P\pm(\boldsymbol{\rho})]|^2, \qquad (2)$$

где F [ ] — знак преобразования Фурье; $\boldsymbol{\rho}$ — обобщенная координата в плоскости зрачка. Предположим, что уравнения (2) решены относительно $P\pm(\boldsymbol{\rho})$. Тогда синтез требуемой ЧПФ предполагает реализацию двух некогерентных оптических систем, одна из которых имеет ЗФ $P_+(\boldsymbol{\rho})$, а другая $P_-(\boldsymbol{\rho})$ и последующее вычитание изображения, полученного первой системой из изображения, которое получено второй системой. При этом результирующая ЧПФ будет равна

$$\tau(\boldsymbol{\omega}) = \tau_+(\boldsymbol{\omega}) - \tau_-(\boldsymbol{\omega}) = F[S_+(\mathbf{x})] - F[S_-(\mathbf{x})]. \qquad (3)$$

Для зрачка бесконечных размеров уравнение (2) имеет решение

$$P\pm(\boldsymbol{\rho}) = F^{-1}\left[\sqrt{S_\pm(\mathbf{x})}\exp\{i\Psi_\pm(\mathbf{x})\}\right]$$

при любых ФРТ $S\pm(\mathbf{x})$ и произвольной фазе $\Psi_\pm(\mathbf{x})$. Для зрачка конечных размеров ($P\pm(\boldsymbol{\rho})=0$ вне зрачка) уравнения (2), вообще говоря, не имеют решения. Поэтому, как отмечалось в [1 – 3], большое значение имеет разработка приближенного метода обращения уравнений (2) для зрачка конечных размеров. При этом погрешность аппроксимации оказывается зависящей от выбора фазы $\Psi_\pm(\mathbf{x})$. В [4] фаза $\Psi_\pm(\mathbf{x})$ полагалась равной нулю, что не обеспечивает наименьшей погрешности аппроксимации. В [5] описан метод расчета чисто фазовой зрачковой функции, основанный на использовании геометрического приближения для фазы, используемой в качестве начального шага итерационной процедуры Гершберга-Сакстона. Чисто фазовая ЗФ обеспечивает максимальное просветление зрачка и наибольшее значение ЧПФ на нулевой пространственной частоте. С другой стороны, поскольку амплитудно-фазовая ЗФ имеет по сравнению с чисто фазовой добавочную степень свободы – амплитуду, то с ее помощью можно в принципе получить большую точность аппроксимации и большее отношение сигнал/шум при синтезе ряда ЧПФ, например, тех, которые имеют острый максимум на ненулевой пространственной частоте.

Целью настоящей статьи является решение задачи определения оптимальных фазовых функций $\Psi_\pm(\mathbf{x})$, обеспечивающих минимум погрешности аппроксимации для ЧПФ $\tau(\boldsymbol{\omega})$ достаточно общего вида. Метод итераций для определения оптимальных решений аналогичен рассмотренному в [6] для нахождения токового распределения антенны по заданному модулю диаграммы направленности.

Постановка и решение задачи

В общем случае требуемая ЧПФ $\tau^0(\boldsymbol{\omega})$ имеет двухполярную ФРТ $S^0(\mathbf{x})$, определяемую выражением

$$S^0(\mathbf{x}) = F^{-1}[\tau^0(\omega)]. \qquad (4)$$

В соответствии с принципом псевдокогерентности преобразования [3] разделим ФРТ $S^0(\mathbf{x})$ на положительную

$$S_+^0(\mathbf{x}) = R[S^0(\mathbf{x})] \ge 0 \qquad (5)$$

и отрицательную

$$S_-^0(\mathbf{x}) = R[-S^0(\mathbf{x})] \ge 0 \qquad (6)$$

части. В выражениях (5), (6) функция $R[z]$ определяется так

$$R[z] = \begin{cases} z; z > 0, \\ 0; z \le 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Рассматривая $S_\pm^0(\mathbf{x})$ как ФРТ некогерентных оптических систем с ЧПФ $\tau_\pm^0(\omega)$, получим требуемую ЧПФ $\tau^0(\omega)$ двузрачковой оптической системы в виде

$$\tau(\boldsymbol{\omega}) = \tau_+(\boldsymbol{\omega}) - \tau_-(\boldsymbol{\omega}). \qquad (8)$$

Задача сводится к определению ЗФ $P_\pm(\boldsymbol{\rho})$ зрачка конечных размеров, для которых ошибка аппроксимации минимальна.

Среднеквадратичное отклонение синтезируемой ФРТ от заданной ФРТ $S^0(\mathbf{x})$ (4) имеет вид

$$\sigma^2 = \sigma_+^2 + \sigma_-^2, \qquad (9)$$

где

$$\sigma_\pm^2 = [\int S_\pm^0(\mathbf{x})d\mathbf{x}]^{-1} \times$$
$$\times[\int | F[P_\pm(\rho)] - \sqrt{S_\pm^0(\mathbf{x})} \exp\{i\Psi_\pm(\mathbf{x})\} |^2 \, d\mathbf{x}]. \qquad (10)$$

Приравнивая нулю вариацию функционала σ^2 (9), получим уравнения для оптимальных фазовых функций $\Psi_\pm(\mathbf{x})$, и соответствующих им зрачковых функций $P_\pm(\rho)$:

$$\Psi_\pm(\mathbf{x}) = \arg[\int K(\mathbf{x},\mathbf{x}')\sqrt{S_\pm^0(\mathbf{x}')} \exp\{i\Psi_\pm(\mathbf{x}')\}d\mathbf{x}'], \qquad (11)$$

$$P_\pm(\rho) = \begin{cases} P_\pm^0(\rho); \rho \in D, \\ 0; \rho \notin D, \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$P_\pm^0(\rho) = F^{-1}[\sqrt{S_\pm^0(\mathbf{x})} \exp\{i\Psi_\pm(\mathbf{x})\}], \qquad (13)$$

а ядро уравнения (11) имеет вид

$$K(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \int\limits_{\rho\in D} \exp\{i\rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}d\rho. \qquad (14)$$

Здесь D – область, занимаемая зрачком оптической системы. Минимальная величина среднеквадратичного отклонения σ^2 (9), достигаемая на оптимальных функциях $\Psi_\pm(\mathbf{x})$ (11) и $P_\pm(\rho)$ (12), равна

$$\text{мин}\sigma^2 = \text{мин}\sigma_+^2 + \text{мин}\sigma_-^2, \qquad (15)$$

где $\text{мин}\sigma_\pm^2$ получается подстановкой выражений (12), (13) в (10) и имеет вид

$$\text{мин}\sigma_\pm^2 = 1 - [\int\limits_{\rho\in D} | P_\pm^0(\rho) |^2 \, d\rho][\int | P_\pm^0(\rho) |^2 \, d\rho]^{-1} \qquad (16)$$

Соотношения (13), (16) показывают, что в рассматриваемом классе фазовых функций $\Psi_\pm(\mathbf{x})$ оптимальной будет такая функция, которая приводит к ЗФ $P_\pm(\rho)$, максимально просветляющей зрачок.

Решение уравнения (11) может быть получено методом последовательных приближений по формуле

$$\Psi_\pm^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \arg[\int K(\mathbf{x},\mathbf{x}')\sqrt{S_\pm^0(\mathbf{x}')} \exp\{i\Psi_\pm^{(n)}(\mathbf{x}')\}d\mathbf{x}'];$$
$$n = 0,1,... \qquad (17)$$

В [6] показано, что процесс итерации (17) сходится. Более того, процесс итерации (17) построен так, чтобы на каждом шаге минимизировать линейную по функции $\exp\{i\Psi_\pm^{(n)}(\mathbf{x})\}$ часть приращения функционала σ^2 (9), т.е. обеспечивает быструю сходимость.

Ограничимся в дальнейшем случаем более просто реализуемых вещественных ЗФ $P_\pm(\rho)$. Тогда фазовые функции $\Psi_\pm(\mathbf{x})$ будут принимать два значения 0 и π. Обозначив через $Q_\pm(\mathbf{x}) = \exp\{i\Psi_\pm(\mathbf{x})\}$, получим уравнение для итераций

$$Q_\pm^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \text{sign}[\int K(\mathbf{x},\mathbf{x}')\sqrt{S_\pm^0(\mathbf{x}')}Q_\pm^{(n)}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'];$$
$$n = 0,1... \qquad (18)$$

Перейдем теперь к решению конкретной задачи синтеза изотропной ЧПФ $\tau^0(\omega) = \tau^0(|\,\omega\,|) = \tau^0(\omega)$ для круглого зрачка.

Синтез изотропной ЧПФ

В задачах оптической обработки сигналов часто возникает необходимость в изотропной ЧПФ двух типов: узкополосной ЧПФ и ЧПФ с подавлением низких пространственных частот и подъемом вблизи предельной частоты. Оба типа ЧПФ могут быть получены из двухполярной ФРТ

$$S^0(\mathbf{x}) = S^0(|\,\mathbf{x}\,|) = S^0(x) = CJ_0(\omega_0 x)\exp(-2\alpha x), \qquad (19)$$

где $J_0(z)$ – нулевая функция Бесселя; (ω_0, α) – заданные постоянные, величина которых определяется требованиями к синтезируемой ЧПФ; C — нормировочная постоянная. ЧПФ, соответствующая ФРТ $S^0(x)$ (19), равна [7]:

$$\tau^0(\Omega) = 4C\delta\pi^{-1}\omega_0^{-2}[(\Omega-1)^2 + 4\delta^2]\times$$
$$\times[(\Omega+1)^2 + 4\delta^2]^{-1/2} E(2\Omega^{1/2}[(\Omega+1)^2 + 4\delta^2]^{-1/2}), \qquad (20)$$

где $\Omega = \omega\omega_0^{-1}; \delta = \alpha\omega_0^{-1}; E(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл. На рис. 1 приведены ЧПФ $\tau^0(\Omega)$ при различных значениях δ. В частности, при $\delta \le 0,2$ получаем ЧПФ в виде узкополосного изотропного фильтра с максимумом, соответствующим радиальной пространственной частоте $\omega = \omega_0; (\Omega = 1)$. При $\delta \approx 0,25 \div 0,4$ получается ЧПФ с подъемом в области предельной частоты. Ядро (14) будет вещественной функцией

$$K(x, x') = 2\pi \int_0^1 J_0(\rho x) J_0(\rho x') \rho d\rho, \qquad (21)$$

а уравнение итераций для $Q_{\pm}^{(n)}(x)$ будет иметь вид

$$Q_{\pm}^{(n+1)}(x) = \mathrm{sign}[\int K(x, x') \sqrt{R[\pm J_0(\omega_0 x')]} Q_{\pm}^{(n)}(x') \times \times \exp(-\alpha x') x' dx']; \qquad .(22)$$
$$n = 0,1...$$

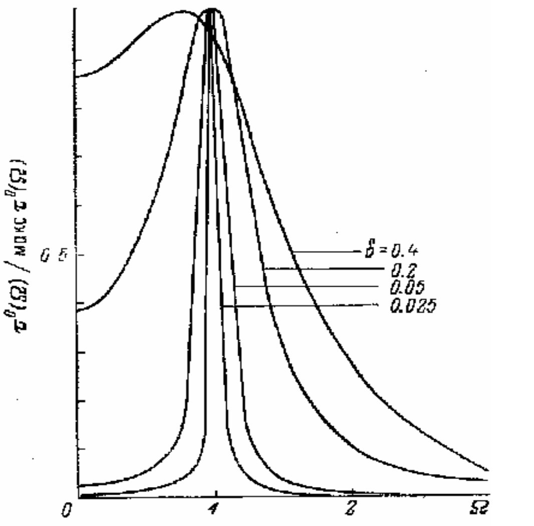

Рис. 1. Изотропная ЧПФ круглого зрачка $\tau^0(\Omega)$ при различных значениях параметра δ

Хотя процесс итераций, как было сказано, сходится при любой начальной функции, он может приводить к разным решениям для различных начальных функций, так как уравнение (11) имеет, вообще говоря, не единственное решение. Однако асимптотический вид всех решений при $x \to \infty$ легко установить. Действительно, при $x \to \infty$ соядро $K(x, x') \to x^{-1} J_1(x)$, где $J_1(x)$ – функция Бесселя. Следовательно, асимптотически при $x \to \infty$ функция $Q_{\pm}(x) = \mathrm{sign} J_1(x)$. Отсюда, кстати, вытекает, что функция $Q_{\pm}(x) = 1$, использованная в [4], не является оптимальной. Поскольку перебрать все начальные функции в поисках той, которая приводит к глобальному экстремуму, невозможно, то ограничимся двумя альтернативными начальными функциями, приводящими к двум типам решений. Первая из них

$$Q_{\pm}^{(0)}(x) = 1, \qquad (23)$$

вторая

$$Q_{+}^{(0)}(x) = \begin{cases} +1; x \in T_{2k}^{+}, \\ -1; x \in T_{2k+1}^{+}, \end{cases}$$

$$Q_{-}^{(0)}(x) = \begin{cases} +1; x \in T_{2k}^{-}, \\ -1; x \in T_{2k+1}^{-}, \end{cases} \quad k = 0,1,... , \qquad (24)$$

где T_k^+ и T_k^- – интервалы, занумерованные в порядке возрастания x, на которых отличны от нуля функции $S_+^0(x) = R[J_0(\omega_0 x)] \exp(-\alpha x)$ и $S_-^0(x) = R[-J_0(\omega_0 x)] \exp(-\alpha x)$. Используя функции (23) или (24) в качестве начального шага и выполнив процесс итераций, можно затем для каждого вида начальных функций найти ЗФ $P_+(\rho)$ и $P_-(\rho)$, ЧПФ $\tau_+(\omega)$, $\tau_-(\omega)$, $\tau(\omega) = \tau_+(\omega) - \tau_-(\omega)$ и погрешность аппроксимации σ^2 для разных значений ω_0 и δ. Назовем условно решение, которое получается при начальной функции (23), «четным», а при начальной функции (24) – «нечетным». Условность в том, что четными (знакопостоянными) или нечетными (знакопеременными) являются, вообще говоря, только начальные функции $Q_{\pm}^{(0)}(x)$. Сравнивая погрешность аппроксимации для двух типов решений, можно выбрать из них тот, который обеспечивает меньшую погрешность. Оказывается, что при различных значениях величины ω_0 предпочтительней с точки зрения погрешности аппроксимации будет либо один, либо другой тип решений. Вместе с тем от величины ω_0 оказывается зависящей и амплитуда синтезированной ЧПФ $\tau(\Omega)$, что также необходимо учитывать при выборе одного из типов решений.

Для проверки изложенного метода оптимального синтеза ЧПФ двузрачковой оптической системы были произведены расчеты для заданной ЧПФ $\tau^0(\Omega)$ вида (20). Минимальные значения функционала (9), полученные для «нечетного» и «четного» решений для различных величин δ, ω_0 показывают, что при $\delta < 0,4; 1,0 < \omega_0 < 1,6$ «нечетное» решение предпочтительнее. Когда $\delta > 0,4$, для всех представляющих практический интерес ω_0 «четные» и «нечетные» решения фактически совпадают. На рис. 2 приведены в качестве примера оптимальные ЧПФ двузрачковой оптической системы $\tau_1(\Omega)$ и ЗФ $P_{1\pm}(\rho)$ (штриховые линии), соответствующие решению уравнения (18) при начальной функции $Q_{\pm}^{(0)}(x)$ вида (24) («нечетные» решения), а также ЧПФ и ЗФ $P_{2\pm}(\rho)$, $\tau_2(\Omega)$ (сплошные линии), соответствующие начальной функции $Q_{\pm}^{(0)}(x)$ вида (23) («четные» решения); величины $\delta = 0,05; \omega_0 = 0,8$ ЧПФ нормированы на квадрат максимума ЗФ, а ЗФ нормированы по максимуму, чтобы выполнялось условие пассивности оптической системы оптической системы $|P_{1,2\pm}(\rho)| \le 1$. Для других значений ω_0 при $\delta \le 0,2$ графики имеют вид, аналогичный рис. 2.

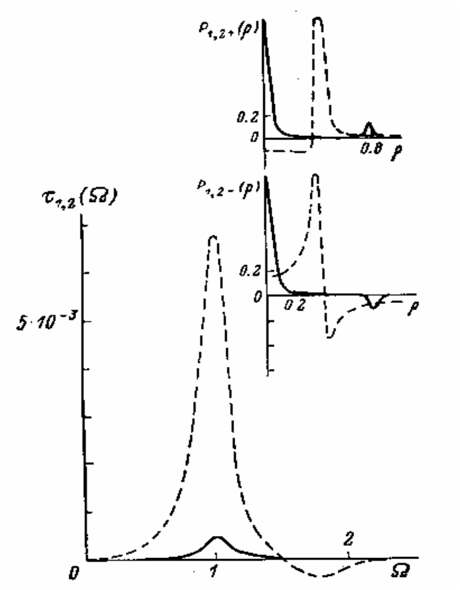

Рис. 2. Оптимальные ЧПФ двузрачковой оптической системы $\tau_1(\Omega)$ и ЗФ $P_{1\pm}(\rho)$ (штриховые линии – «нечетные» решения) и ЧПФ $\tau_2(\Omega)$ и ЗФ $P_{2\pm}(\rho)$, (сплошные линии – «четные» решения) величины $\delta = 0,05; \omega_0 = 0,8$

С ростом δ увеличивается ширина полосы фильтрации. С увеличением ω_0 растет амплитуда ЧПФ $\tau(\omega)$, а у ЗФ смещается положение экстремальных точек, которые у $P_{1\pm}(\rho)$ лежат при $\rho \approx 2^{-1}\omega_0$, а у $P_{2\pm}(\rho)$ – при $\rho = 0$ и $\rho \approx \omega_0$. С увеличением δ всплески ЗФ расширяются. При фиксированных $\delta \le 0,2$ и ω_0 амплитуда ЧПФ $\tau_1(\Omega)$ больше, чем $\tau_2(\Omega)$. При $\omega_0 > 1$ узкополосная фильтрация с помощью «четных» решений невозможна, так как при этом невозможно реализовать на ЗФ всплески при $\rho = \omega_0$, которые в конечном итоге и обеспечивают узкополосную фильтрацию. Даже для тех ω_0, для которых узкополосная фильтрация с помощью «четных» решений возможна, амплитуда ЧПФ оказывается существенно ниже, чем для ЧПФ, реализуемой па решении «нечетного» типа, и различие тем больше, чем меньше δ, т.е. чем уже синтезируемый фильтр. Если учесть, к тому же, возможность для решений «нечетного» типа получить узкополосную фильтрацию и при $\omega_0 > 1$, то различие в амплитудах фильтра увеличится. С другой стороны, при некоторых значениях ω_0 (например, $\omega_0 = 0,8$) погрешность аппроксимации для решений «четного» типа меньше. Амплитуда ЧПФ с увеличением ω_0 (при фиксированном δ) растет.

С этой точки зрения выгодно брать возможно больше ω_0. Однако, когда ω_0 приближается к $\omega_0 = 1$ для решений «четного» типа или к $\omega_0 = 2$ для решений «нечетного» типа, резко возрастает погрешность аппроксимации, так как оказывается невозможным аппроксимировать ЗФ с достаточной точностью в пределах зрачка $\rho \le 1$.

В заключение отметим, что для упрощения практической реализации полученные ЗФ можно приближенно заменить на кусочно-постоянные. Эти функции в свою очередь могут быть использованы для минимизации погрешности в процедуре итераций Гершберга-Сакстона.

Выводы

Предложен метод расчета амплитудно- фазовой зрачковой функции, минимизирующий среднеквадратичное отклонение синтезируемой ФРТ от заданной ФРТ. На входе итерационной процедуры используются две альтернативные начальные функции, приводящие к двум типам решений. Приведены результаты расчета зрачковых функций для реализации узкополосной фильтрации в двухканальном некогерентном оптическом процессоре.

Список литературы

1. *Королев А.Н. Псевдокогерентное преобразование некогерентных изображений // Автометрия. – 1981. – № 1. – С. 46-52.*
2. *Королев А.Н. Синтез частотной характеристики в некогерентных системах оптической обработки информации // В кн.: Применение методов оптической обработки информации и голографии / Под ред. С.Б. Гуревича, В.К. Соколова. – Л., 1980. – С. 85-89.*
3. *Lohman A.W., Rhodes W.T. Two – pupil synthesis of optical transfer functions // Applied Optics. – 1978. – V.17. – P. 1141-1149.*
4. *Королев А.Н., Морозова С.Л. Пространственная фильтрация в некогерентной оптической системе с амплитудно-фазовыми зрачковыми функциями // Оптика и спектроскопия. – 1985. – Вып.2, т. 58. – С. 428-431.*
5. *Королев А.Н., Морозова С.Л. Использование частных решений обратной задачи в оптике для двузрачкового синтеза ОПФ // В кн.: Современное состояние и перспективы оптических методов передачи, хранения и обработки информации / Под ред. С.Б. Гуревича, Г.А. Гаврилова. – Л., 1984. – С. 43-48.*
6. *Войтович Н.Н. О синтезе антенны по заданной амплитудной диаграмме излучения // Радиотехника и электроника. – 1972. – №12, Т. 17. – С. 2491-2498.*
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1970. – 328 с.*

Поступила в редколлегию 9.01.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Стрелков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.