УДК 621.391.83:004.94(045)

В.С. Еременко, В.М. Мокийчук, О.В. Самойличенко

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ НА ВЫБОРКАХ МАЛОГО ОБЪЕМА

Статья посвящена проблемам нахождения аналитических зависимостей для экспериментальных статистических оценок мощности (СОМ) на примере параметрических критериев Фишера и Стьюдента, а также разработке методики определения СОМ критериев на выборках малого объема. Полученные результаты дают возможность проследить каждый этап разработанной методики, оценить точность, существенность коэффициентов, проверить адекватность аппроксимирующей модели.

Ключевые слова: *параметрические критерии, имитационное моделирование, статистическая оценка мощности, аппроксимация, неопределенность, коэффициенты аппроксимации.*

Введение

В [1] были рассмотрены параметрические критерии проверки однородности выборок малых объемов, показана существенная зависимость их мощности от объема выборок. С целью обоснованного использования критериев было предложено использовать статистические оценки их мощности (СОМ). Однако рассчитанные значения СОМ дают возможность оценивать мощность критериев только при объемах выборок и соотношениях параметров, приведенных в полученных таблицах числовых значений. Мощность критерия при других объемах анализируемых данных остается неизвестной. Проводить моделирующий эксперимент методом Монте-Карло для каждого случая (изменение величины выборки, уровня значимости, соотношения дисперсий или математических ожиданий) не является целесообразным, поскольку он достаточно громоздок, а получение простых функциональных зависимостей дает возможность определения необходимого объема выборок для различных уровней значимости. Поэтому была поставлена задача – описать полученные результаты моделирования аналитическими выражениями и разработать методику определения СОМ критериев на выборках малого объема.

Основной материал

Поставленная задача решалась построением регрессионных зависимостей, минимизирующих сумму квадратов отклонений аппроксимирующих функций от экспериментальных точек. Находить коэффициенты линейной аппроксимирующей функции $y = kx + b$ можно с помощью формирования нормальной системы уравнений [2] и составления по ней матричных компонент, при этом коэффициенты a и b будут решением этих систем. Так как зависимость СОМ критериев от объема выборок имеет явно выраженный нелинейных характер, проводилась линеаризация посредством функционального преобразования входных величин (оценок математических ожиданий групп, полученных в результате моделирования), которая позволила реализовать необходимую функциональную зависимость – степенную, показательную, дробно-линейную, логарифмическую, гиперболическую, дробно-рациональную). Построение аппроксимирующих функций СОМ рассмотрено на примере наиболее применяемых критериев Фишера и Стьюдента для данных, распределенных по гауссовскому, равномерному и треугольному законах, так как они наиболее часто встречаются в измерительных задачах. Хотя критерии Фишера и Стьюдента выведены для данных, распределенных по гауссовскому закону, существующие критерии проверки на нормальность (например, W-критерий, RS критерий на объемах выборок до 30 значений не позволяют с достаточной степенью надежности выявить отличие данных, распределенных по гауссовскому закону и данных с треугольным и равномерным законом распределения [3].

С целью нахождения оптимальной в смысле минимума среднеквадратической погрешности аппроксимирующей функции, рассчитанной на основе моделирования значения СОМ критериев Фишера и Стьюдента, подставляли в каждую из вышеперечисленных функций и подсчитывали среднеквадратическую погрешность. Полученные результаты приведены в табл. 1.

По полученным данным можно сделать вывод, что в качестве аппроксимирующей функции для СОМ критериев лучше всего подходит гиперболическая функция $y = k\frac{1}{x} + b$.

Таким образом, зная базовую функцию и получив значения коэффициентов для любых значений аргумента можно подсчитать ожидаемое значение аппроксимирующей функции.

Таблица 1

Результаты подстановки

Ф-ия пр.	α	Критерий					
		Фишера			Стьюдента		
		Гаус.	Равн.	Тр.	Гаус.	Равн.	Тр.
Линейная	0,05	0,88	0,66	0,72	0,39	0,38	0,39
	0,10	0,44	0,40	0,44	0,26	0,27	0,27
Степенная	0,05	0,51	0,37	0,39	0,09	0,11	0,09
	0,10	0,21	0,21	0,23	0,04	0,05	0,05
Показатель-ная	0,05	0,86	0,64	0,70	0,36	0,36	0,36
	0,10	0,43	0,39	0,43	0,23	0,25	0,24
Дробно-линейная	0,05	0,89	0,66	0,72	0,34	0,34	0,33
	0,10	0,43	0,40	0,43	0,20	0,23	0,22
Логариф-мическая	0,05	0,61	0,45	0,48	0,21	0,22	0,21
	0,10	0,27	0,26	0,28	0,13	0,14	0,13
Гипербо-лическая	0,05	**0,18**	**0,11**	**0,12**	**0,06**	**0,04**	**0,06**
	0,10	**0,04**	**0,04**	**0,05**	**0,07**	**0,06**	**0,05**
Дробно-рациональная	0,05	1,46	0,68	1,06	6,30	17,84	4,60
	0,10	0,42	0,27	0,35	7,44	21,33	16,18

Известно [4], что при проведении нескольких экспериментов в одних условиях каждый раз получаем несколько иные результаты измерений, то есть вследствие расчетов по методу наименьших квадратов будем получать разные значения оценок коэффициентов аппроксимирующей функции.

Оценки точности коэффициентов были найдены исходя их условия, что стандартная неопределенность результатов измерений СОМ заранее неизвестна. Оценки стандартных неопределенностей коэффициентов регрессии были получены на основании анализа внутригрупповой дисперсии соответствующих точек, по которым строилось уравнение регрессии, фактически внутригрупповая дисперсия характеризует качество используемого при моделировании генератора случайных чисел. Стандартные неопределенности коэффициентов аппроксимации находились с помощью их ковариационной матрицы, определяемой по стандартной методике для косвенных измерений. Коэффициент охвата при расчете расширенной неопределенности оценивают по таблицам Стьюдента для $n-2$ степеней свободы. Коэффициенты аппроксимирующего уравнения, а также их расширенные неопределенности для рассматриваемых критериев Стьюдента и Фишера, разных законов распределения и доверительных вероятностей приведены в табл. 2.

Для оценки доверия к полученным оценкам коэффициентов были рассчитаны относительные значения стандартных неопределенностей коэффициентов. Они приведены в табл. 3, из которой видно, что относительные стандартные неопределенности коэффициентов малы, поэтому доверие к этим коэффициентам достаточно велико. Для подтверждения данного факта проводилась проверка существенности полученных коэффициентов по критерию Стьюдента.

Таблица 2

Коэффициенты аппроксимирующего уравнения

Закон распред.	P	k	b
Для критерия Фишера			
Гаусс.	0,95	22,5±1,0	1,2±0,1
	0,90	14,4±0,5	1,19±0,02
Равном.	0,95	20,6±1,8	1,09±0,10
	0,90	11,5±0,6	1,16±0,03
Тр.	0,95	12,5±0,6	1,21±0,03
	0,90	12,1±0,5	1,21±0,03
Для критерия Стьюдента			
Гаусс.	0,95	13,9±0,6	1,50±0,03
	0,90	9,9±0,5	1,44±0,03
Равном.	0,95	12,9±0,6	0,52±0,03
	0,90	10,0±0,6	0,43±0,03
Тр.	0,95	13,5±0,6	0,50±0,03
	0,90	10,0±0,6	0,43±0,03

Таблица 3

Относительные значения
стандартных неопределенностей коэффициентов

Закон распре-деления	P	Кр. Фишера		Кр. Стьюдента	
		$k_{отн}$	$b_{отн}$	$k_{отн}$	$b_{отн}$
Гаусс.	0,95	0,004	0,090	0.004	0.040
	0,90	0,004	0,040	0.006	0.041
Рав-ном.	0,95	0,009	0,166	0.005	0.123
	0,90	0,005	0,050	0.006	0.141
Тр.	0,95	0,010	0,050	0.005	0.123
	0,90	0,004	0,041	0.004	0.086

Проверка основывается на том, что если рассеяние коэффициента большее по сравнению с его значением, коэффициент признают несущественным. Рассчитывается параметр g_t соотношения оценки коэффициента к его стандартной неопределенности, который сравнивается с критическим значением $t_{1-\alpha/2}$ с таблицы квантилей распределения Стьюдента с $\nu = N-2$ степенями свободы (для $P=0,90$ $t_{1-\alpha/2}=1,711$, для $P=0,95$ $t_{1-\alpha/2}=$ 2,064,). Если $g_t > t_{1-\alpha/2}$ коэффициент признают существенны. Рассчитанные значения параметра g_t приведены в табл. 4.

Таблица 4

Рассчитанные значения параметра g_t

Закон распре-деления	P	Кр. Фишера		Кр. Стьюдента	
		g_k	g_b	g_k	g_b
Гаусс.	0,95	24,34	22,46	16,97	46,47
	0,90	28,12	48,20	20,48	56,06
Равном.	0,95	11,32	11,41	20,40	15,47
	0,90	19,80	37,87	24,61	18,66
Тр.	0,95	9,85	40,45	16,48	13,50
	0,90	24,14	45,87	19,88	16,29

Из таблицы видно, что все коэффициенты следует признать существенными, поскольку они значительно превышают пороговое значение $t_{1-\alpha/2}$.

Следующим важным условиям при построении аппроксимирующей функции СОМ является проверка адекватности модели, то есть ее соответствия результатам моделирования. Проверка необходима для того, чтобы выбрать оптимальное количество аппроксимирующих членов. Если количество членов аппроксимирующего ряда слишком мало, возникает систематическое отклонение от базовых точек, если велико, то имеет место сильный случайный фактор влияния на аппроксимирующую функцию. Проверку адекватности модели проводят с помощью F-критерия Снедока. Находят оценку отклонения экспериментальных точек от функции аппроксимации $S^2_{a,y}$ и внутригрупповою дисперсию самых результатов измерений S^2_y и находят их отношение F, которое сравнивается с пороговым значением $F_{\alpha,\nu1,\nu2}$ с таблицы квантилей распределения Фишера. $\nu1 = n-2, \nu2 = m-n$, m – общее количество измерений, проведенных при построении линии регрессии; (для P = 0,95 $F_{\alpha,\nu1,\nu2}$ = 1,51, для P = 0,9 $F_{\alpha,\nu1,\nu2}$ = 1,38). Рассчитанные значения параметра F приведены в табл. 5.

Таблица 5

Рассчитанные значения параметра F

Закон распределения	Кр. Фишера	Кр. Стьюдента
	$F_ф$	F_c
Гаусс.	1,08	1,12
Равном.	1,10	1,18
Тр.	1,08	1,09

Из таблицы видно, что согласно критерию Сендока выбранные модели аппроксимации адекватны. Проверить правильность выбранного порядка аппроксимирующей функции можно сравнив $S^2_{a,y}$ и S^2_y. Если $S^2_{a,y} < S^2_y$, тогда порядок аппроксимирующей функции больше необходимого, если $S^2_{a,y} > S^2_y$ – меньше. Поскольку, как было указано выше, S^2_y характеризует качество генератора случайных чисел, используемого при моделировании то чем больше значений для расчета внутригрупповой дисперсии, тем меньшим будет значение S^2_y. Количество смоделированных данных позволяет получить значение S^2_y порядка 10^{-3} рассчитанные значения $S^2_{a,y}$ также имеют порядок 10^{-3}, что позволяет сделать вывод о достаточном порядке аппроксимирующей функции.

Таким образом, последним шагом является построение аппроксимирующей функции и оценка ее неопределенности.

Стандартная неопределенность аппроксимирующей функции находится их известных стандартных неопределенностей коэффициентов аппроксимации. Расширенная неопределенность представляет собой полосу вокруг полученной аппроксимирующей функции, которая с заданным уровнем доверия будет охватывать значения найденной на основе метода наименьших квадратов функциональной зависимости. Коэффициент охвата берется как квантиль распределения Стьюдента.

Найденные аппроксимирующие функции для рассматриваемых параметрических критериев и полоса неопределенности вокруг них представлены на рис. 1 – 4. Точками обозначены исходные полученные в процессе эксперимента значение СОМ критериев, пунктиром – аппроксимирующая функция, сплошными линиями – полосы неопределенности.

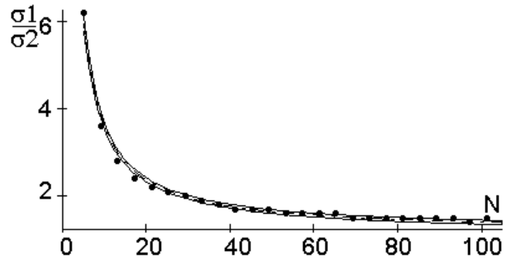

Рис. 1. Аппроксимирующая функция СОМ критерия Фишера для P = 0,95 (гауссовский закон распределения исходных данных)

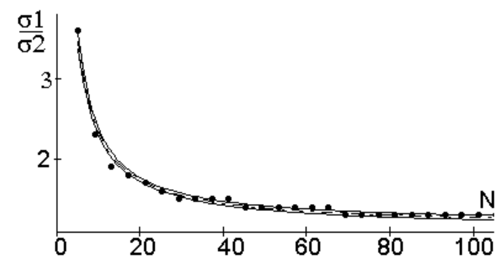

Рис. 2. Аппроксимирующая функция СОМ критерия Фишера для P = 0,95 (равномерный закон распределения исходных данных)

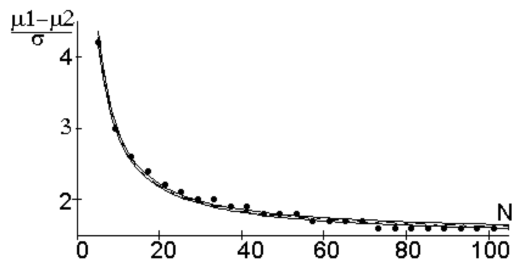

Рис. 3. Аппроксимирующая функция СОМ критерия Стьюдента для P = 0,95 (гауссовский закон распределения исходных данных)

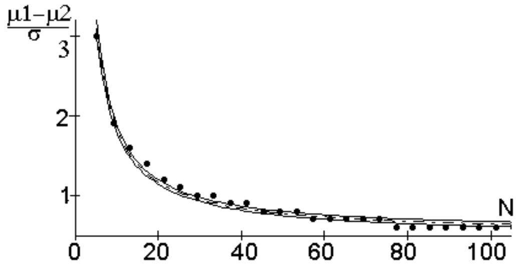

Рис. 4. Аппроксимирующая функция СОМ критерия Стьюдента для P = 0,95 (равномерный закон распределения исходных данных)

Из рисунков видно, что регрессионные кривые достаточно аппроксимируют значения СОМ критериев полученные модельным экспериментом и, следовательно, предложенные регрессионные уравнения могут быть использованы для определения СОМ критериев для заданного объема выборки и соотношения параметров.

Таким образом, для обоснованного использования на практике критериев в случае ограниченных объемов выборок с целью избегания ошибок разработана следующая методика.

Методика построения СОМ критериев на выборках малого объема:

1. СОМ критериев строиться в виде зависимости переменной x от объема выборки. Переменная x может быть определена как:

а) соотношение с.к.о. (для критериев проверки равенства дисперсий);

б) отношение разности оценок математических ожиданий к значению с.к.о. (для критериев проверки равенства математических ожиданий).

2. Для заданного критерия согласно таблице числовых значений среднеквадратической погрешности аппроксимации выбирается тип аппроксимирующей функции.

3. Для выбранного уровня значимости рассчитываются коэффициенты аппроксимирующего уравнения, а также их расширенные неопределенности.

4. Проводиться проверка:

а) полученных коэффициентов; оценивается доверие к коэффициентам на основе относительных значений стандартных неопределенностей коэффициентов; проверяется существенность коэффициентов;

б) адекватности модели аппроксимации.

Если проверка показала, что коэффициенты несущественны либо что модель неадекватна, то следует внести коррективы в порядок аппроксимирующей функции: увеличить либо уменьшить его в соответствии с полученными результатами.

5. По аппроксимирующему уравнению рассчитывается необходимый минимальный объем выборки для заданного уровня значимости и соотношения параметров (от значения переменной x). Если он не может быть обеспечен условиями исследований, то необходимо вносить коррективы в значение переменной x или использовать более мощный критерий. Возможное решение обратной задачи: нахождение по заданному объему выборки соотношения параметров, при которых критерий будет обеспечивать заданную мощность.

Список литературы

1. Еременко В.С., Мокийчук В.М. Самойличенко О.В. Исследование мощности критерия Кохрена при ограниченном числе наблюдений // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС. – 2007. – Вип. 6 (64). – С. 35-39.

2. Доерфель К. Статистика в аналитической химии / Под. ред. В.В. Налимова. – М.: Мир, 1969. – 248 с.

3. Еременко В.С., Куц Ю.В., Мокийчук В.М. Оценка однородности выборок малого объема // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС. – 2006. – Вип. 7 (56). – С. 26-29.

4. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.

Поступила в редколлегию 14.04.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.П. Мачехин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ОЦІНОК ПОТУЖНОСТІ КРИТЕРІЇВ ОДНОРІДНОСТІ НА ВИБІРКАХ МАЛОГО ОБ'ЄМУ

Єременко В.С., Мокійчук В.М., Самойличенко О.В.

Стаття присвячена проблемам знаходження аналітичних залежностей для експериментальних статистичних оцінок потужності (СОП) на прикладі параметричних критеріїв Фішера і Стьюдента, а також розробці методики визначення СОП критеріїв на вибірках малого об'єму. Отримані результати дають можливість прослідкувати кожний етап розробленої методики , оцінити точність, суттєвість коефіцієнтів, перевірити адекватність моделі апроксимації.

Ключові слова: *параметричні критерії, імітаційне моделювання, статистична оцінка потужності, апроксимація, невизначеність, коефіцієнти апроксимації.*

DETERMINATION OF POWER STATISTICAL ESTIMATION OF HOMOGENEITY CRITERIA ON SMALL SAMPLE SIZE

Yeremenko V.S., Mokiichuk V.M., Samoylichenko O.V.

Article is devoted to problems of analytical dependence solving of experimental power statistical estimation (PSE) by the example of parametric Fisher and Student criteria and also devoted to method preparation of PSE determination criteria on small sample size. Findings allow to monitor each stage of developed procedure, to estimate accuracy and importance of coefficients, to check the approximation model adequacy.

Keywords: *parametric criteria, imitation design, statistical estimation of power, approximation, vagueness, coefficients of approximation.*