УДК 621.296.9.001.1:621.376.4:52/7.61

В.В. Печенин, А.Р. Сарамолки

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ, МАСКИРУЕМЫХ АДДИТИВНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ШУМОМ

Методом статистической оценки параметров сигналов синтезирован цифровой алгоритм оценки фазы гармонического сигнала маскируемого гауссовским шумом. Оценена величина проигрыша синтезированного алгоритма по сравнению с оптимальной оценкой. Приведены основные расчетные соотношения, позволяющие оценить точность и смещение оценки фазы при различных весовых функциях фазовых отсчетов. Результатом настоящей работы является теоретический синтез цифровых алгоритмов оценивания фазы гармонического сигнала, принимаемого на фоне гауссовой помехи, обусловленной внутренними шумами приемного тракта фазовой радиотехнической системы. При этом используется сигнум-преобразование исходной смеси сигнала и помехи.

Ключевые слова: *параметр, сигнал, алгоритм, шум, синтез, помеха, тракт, цифровой, амплитуда, фаза, колебание, коэффициент, синтез, параметр, точность.*

Введение

Быстрое развитие многих направлений активной человеческой деятельности в современную эпоху сопровождается повышением требований и точности координатных изменений. Среди известных методов определения координат объектов фазовый является наиболее точным и универсальным [1].

Технические средства вычисления координат фазовым методом используют информацию о местоположении объекта, закодированную в фазе несущей принимаемого колебания. К числу таких технических средств относятся фазовые и импульсно-фазовые радиотехнические, системы траекторных измерений, используемых при летно-технических испытаниях воздушных и космических объектов и ряд других. Существующая теория оценок параметров сигнала может быть применена и в случае цифровой обработки фазовых измерений, маскируемых гауссовой аддитивной помехой. Важным этапом цифровой обработки фазовых измерений является методика представления аналоговой смеси гармонического сигнала и нормальной помехой в виде дискретизованных цифровых отсчетов. Наиболее простым из существующих методик достаточно просто реализуемых технически является сигнум-преобразование с дальнейшим дифференцирование и формированием последовательности нулевых пересечений (перепадов смеси) с положительной или отрицательной производной. Таким же способом формируются и опорная последовательность нулевых пересечений.

Целью настоящей работы является теоретический синтез цифровых алгоритмов оценивания фазы гармонического сигнала, принимаемого на фоне гауссовой помехи, обусловленной внутренними шумами приемного тракта фазовой радиотехнической системы. При этом используется сигнум-преобразование исходной смеси сигнала и помехи.

Основное содержание работы

Будем полагать, что цифровой обработке подвергается сигнал вида:

$$\eta(t) = \operatorname{sign}U(t); \tag{1}$$

где

$$U(t) = V(t)\cos\Phi(t), \tag{2}$$

В выражении (2) V(t) – огибающая узкополосной смеси сигнала и помехи

$$V(t) = \left\{\left[N_c(t) + S_c(t)\right]^2 + \left[N_5(t)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}; \tag{3}$$

S(t) – амплитуда полезного сигнала; $N_c(t)$ и $N_s(t)$ – независимые, нормальные медленно изменяющиеся стационарные случайные функции с нулевым математическим ожиданием;

$$\left\langle N_S(f)\right\rangle = \left\langle N_c(t)\right\rangle = 0 \tag{4}$$

и корреляционной функцией

$$\left\langle N_c(t)\cdot N_c(t+\tau)\right\rangle = \left\langle N_S(t) + N_S(t+\tau)\right\rangle = \delta^2\rho(\tau) . \tag{5}$$

Полную фазу $\Phi(t)$ обычно выражают в угловой мере и считают, что в интервале между двумя соседними точками перемены знака функции $\cos\Phi(t)$ она изменяется непрерывно на величину, равную π, принимая значения 0, $\pi, 2\pi \ldots n\pi$. Таким образом, функция $\Phi(t)$ позволяет судить о законе следствия по времени точек, в которых колебание изменяет знак.

Предположим, что колебание $U(t)$ подвергается нелинейному преобразованию

$$\operatorname{sign}U(f) = \begin{cases} 1 \text{ при } u(f) > 0; \\ 0 \text{ при } u(f) = 0; \\ 1 \text{ при } u(f) < 0. \end{cases} \tag{6}$$

В работах [2 – 4] показано, что статистические характеристики процессов $u(t)$ и $\eta(t)$ не очень сильно отличаются друг от друга. При этом имеется в виду различия, имеющие место в форме энергетического спектра и функции корреляции. Воспользуемся эквивалентом функции правдоподобия [5] вида

$$\widetilde{M}(t,\omega,\varphi) = \int_0^T \eta(t)\cos(\text{cot} + \varphi)dt, \tag{7}$$

где T – интервал наблюдения (изменения) полной фазы сигнала $\Phi(t)$.

При известном значении $\omega = \omega_0$, где ω_0 - опорное значение частоты сигнала, оцениваемым параметром является φ^*. На практике априори значение частоты сигнала $\omega \neq \omega_0$, поэтому необходимо находить и оценку частоты ω^*.

Предположим далее, что формула (7) может быть записана через моменты выпадения нулей $\vec{t_1}\ldots\vec{t_n}$ процесса $\dot{\eta}(t)+$ (точка – производная, + – положительные нулевые переходы)

Синтезируем на основе статистической методики оценивания параметров ω^*, φ^*[6] измерители частоты и фазы, близкие к оптимальным. После несложных преобразование выражения (7) и вычислений интеграла получим

$$\widetilde{M}(t,\omega,\varphi) = \frac{1}{\omega}\left\{\left[\pm\cos\varphi\sin\pi\oint T \pm \sin\varphi\cos\pi\oint T\right]\right\} - $$
$$-\sum_{i=1}^{n^+}\sin\left(\omega t_i^+ - \varphi\right), \tag{8}$$

где n^+ – число положительных переходов процесса $u(t)$ через нулевой уровень; t_i^+ – моменты времени, соответствующие перемене знака u(f) в положительную сторону.

Следует отметить, что когда оценки ω^* и φ^* совпадают с параметрами опорного колебания $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, первое слагаемое в [8] не превосходит значение ± 1, тогда как второе слагаемое вблизи $\omega_0 = \omega^*$ и $\varphi_0 = \varphi^*$ имеют порядок n^+ и изменяются сравнительно быстро при изменениях ω и φ. Функция $\frac{1}{\omega}$ в интервале возможных значений изменения частоты $\omega \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ изменяется медленно, особенно, если выполняется условие $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$.

Поэтому для означенного определения ω^* и φ^* можно сохранить лишь второе слагаемое в (8). В этом случае

$$\widetilde{M}(t,\omega,\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \sin(\omega t_i + \varphi). \qquad (9)$$

Для нахождения оператора оценки частоты и её схемного формирования необходимо решить уравнение вида

$$\widetilde{M}(t,\omega,\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \sin(\omega t_i + \varphi). \qquad (10)$$

При известной частоте, $\omega^* = \omega_0'$, т.е. наличие опорного колебания оценка фазы находится из уравнения

$$\varphi^* = \arg \widetilde{M}(t,\omega_0,\varphi), \qquad (11)$$

где

$$\arg \widetilde{M}(t,\omega_0\varphi) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + p\pi. \qquad (12)$$

В выражении (12) x,y вычисляются следующим образом:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i; \quad y = \frac{1}{n}\cos\varphi_i. \qquad (13)$$

При известном значении опорного колебания:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i; \quad y = \frac{1}{n}\cos\varphi_i, \qquad (14)$$

где φ_i – дискретные отсчеты фазы информационного колебания $U(f)$, регистрируемые цифровым фазометром. Коэффициент p в формуле (12) введен для того, чтобы вычислять оценку фазы φ^* в пределах $0...2\pi$. При этом можно записать следующее равенства

$p = 0$ при x>0, y>0;

$p = 1$ при x>0, y<0;

$p = 1$ при x<0, y<0;

$p = 2$ при x<0, y>0.

Рассмотрим более подробно алгоритм формирования оценки фазы (12), если априорно известно $\omega^* = \omega_0$, т.е. дискретные отсчеты φ_i формируются относительно опорного колебания.

Введем функцию $f(\varphi_i)$, которая определяет класс функций, близких к $\sin\varphi_i$. Точность вычисления оценки φ^* будет зависеть от степени близости функций $f(\varphi_i)$, $f\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$ к функциям $\sin\varphi_i$ и $\cos\varphi_i$. В нашем случае мерой близости функций $f(\varphi_i)$ к $\sin\varphi_i$ будет смещение оценки $\Delta\varphi^*$. С учетом вышеизложенного запишем более общее выражение для φ^*, чем формула (12):

$$\varphi^* = \operatorname{arctg}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)}{\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)} + \Delta\varphi^* + p\pi. \qquad (15)$$

При конечном, но достаточно большом значении числа отсчетов фазы и вычислены x и y (формула 14) будут мало отличаться от их математических ожиданий. В этом случае оценка фазы φ^* может быть представлена в виде:

$$\varphi^* = \operatorname{arctg}\frac{M(x)}{M(y)} + p + \frac{M(y)\Delta x - M(x)\Delta y}{M^2(x) + M^2(y)}, \qquad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - M(x), \\ \Delta y &= y - M(y). \end{aligned} \qquad (17)$$

Тогда дисперсия оценки φ^* при большом отношении сигнал/шум $q^2 = \frac{2Э}{N_0}$ (Э – энергия сигнала, N_0 - спектральная плотность шума) будет равна:

$$\sigma_{\varphi*}^2 = \frac{M^2(x)\zeta_x^2 + M^2(y)\zeta_y^2 - 2M(x)M(y)\Delta x\Delta y}{\left[M^2(x) + M^2(y)\right]^2}. \qquad (18)$$

При подстановке $f_1(\varphi_i) = \sin\varphi_i$ и выполнении вычислений по формуле (18) получим

$$\sigma_{\varphi*}^2 = \frac{\frac{1}{n}\left[1 - \pi^2 a_1^2 + \left(\pi^2 a_1^2 - \pi a_2\right)\right]}{\left(2\pi a_1\right)^2}, \qquad (19)$$

где $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\xi P(\xi)d\xi$ – коэффициент при первой гармонике разложения плотности вероятности $P(\xi)$ распределения флуктуаций фазы в ряд Фурье;

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\xi P(\xi)d\xi.$$

Закон распределения $P(\xi)$ получен в [7]

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi}\ell^{-\frac{q^2}{2}}\{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}q^2\cos\xi x[1 + $$

$$+\Phi\left(\frac{q\cos\xi}{\sqrt{2}}\right)\ell^{-\frac{q^2}{4}}\cos^2\xi]\}, \qquad (20)$$

где $\Phi(\bullet)$ – интеграл вероятности.

Рассмотрим случай произвольного отношения сигнал/шум, используя разложение интеграла вероятности $\Phi(\bullet)$

$$\Phi\left(\frac{q\cos\xi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ell^{-\frac{q^2}{4}\cos^2\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\left(\frac{q\cos\xi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)} \quad (21)$$

и учитывай, что

$$\ell^{c\cos t}=I_0(c)+2\sum_{m=1}^{\infty}I_m(c)\cos mt,$$

где $I_0(c), I_m(c)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента. После несложных, но громоздких преобразований, получим для частного случая $q^2 \ll 1$

$$\sigma^2_{\varphi^*}\cong\frac{4}{2\pi q^2 n}, \quad (22)$$

что всего в $\frac{4}{\pi}$ раз хуже дисперсии оптимальной оценки фазы.

Заключение

В работе приведены теоретические результаты синтеза цифрового алгоритма оценки фазы гармонического сигнала, маскируемого нормальным узкополосным шумом. Показано, что при использовании функций веса отсчетов отличных от $\sin(f_i)$ имеет место смещение математического ожидания, которое может быть рассчитано для конкретной функции преобразования $f(f_i)$. Оценена дисперсия измерения фазы по синтезированному цифровому алгоритму, которая отличается от предельно допустимой в $\frac{4}{\pi}$ раз.

Синтезированный по методологии статистической теории оценивания параметров сигнала цифровой алгоритм оценки фазы гармонического сигнала возможно практически реализовать в измерительных радиотехнических системах определения местоположения воздушных и космических объектов различного целевого назначения.

Список литературы

1. *Кинкулькин И.Е. Фазовый метод определения координат / И.Е. Кинкулькин, В.Д. Рубцов, М.А. Фабрик. – М.: Сов. радио, 1979. – 280 с.*
2. *Баришев В.І. Цифровий алгоритм вимірювання допплерівської частоти гармонічного сигналу / В.І. Баришев, В.В.Печенін, О.А. Корщенец // Системи озброєння і військова техніка. – 2008. – Вип. 1 (13). – С. 86-89.*
3. *Печенин В.В. Цифровые алгоритмы усредненной оценки доплеровской частоты при номинальном законе её изменения / В.В. Печенин, В.И. Барышев // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2006. – Вип. 1 (13). – С. 13-15.*
4. *Березин Л.В. Теория и проектирование радиосистем: учебное пособие для вузов / Л.В. Березин, В.А. Вейцель; под ред. В.И. Тикушина. – М.: Сов.радио, 1977. – 236 с.*
5. *Фалькович С.Е. Основы статистической теории радиотехнических систем / С.Е. Фалькович, П.Ю. Костенко. – Х.: ХАИ, 2005. – 389 с.*
6. *Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем: учеб. пособие для вузов / А.И. Перов. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.*
7. *Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов / В.И. Тихонов. – М.: Наука, Главн. ред. физ.- матем. лит., 1970. – 392 с.*

Поступила в редколлегию 22.04.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Барышев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.

ПОТЕНЦІЙНА ТОЧНІСТЬ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ФАЗОВИХ ВИМІРІВ, ЩО МАСКУЮТЬСЯ АДДИТИВНИМ НОРМАЛЬНИМ ШУМОМ

В.В. Печенін, А.Р. Сарамолки

Методом статистичної оцінки параметрів сигналів синтезований цифровий алгоритм оцінки фази гармонійного сигналу маскуючого гаусовським шумом. Оцінена величина програшу синтезованого алгоритму в порівнянні з оптимальною оцінкою. Приведені основні розрахункові співвідношення що дозволяють оцінити точність і зсув оцінки фази при різних вагових функціях фазових відліків. Результатом справжньої роботи є теоретичний синтез цифрових алгоритмів оцінювання фази гармонійного сигналу, що приймається

Ключові слова: *параметр, сигнал, алгоритм, шум, синтез, перешкода, тракт, цифровій, амплітуда, фаза, вагання, коефіцієнт, синтез, параметр, точність.*

THE POTENTIAL ACCURACY OF THE DIGITAL PROCESSING THE PHASE MEASUREMENTS, MASKABLE ADDITIVE BY THE NORMAL NOISE

V.V. Pechenin, A.R. Saramolki

The method of statistical estimation parameters of signals is synthesize the digital algorithm of estimation of phase of harmonic signal of in-use by gausovskim noise. Estimation size of loss of the synthesized algorithm as compared to an optimum estimation. Basic calculation correlations are resulted allowing to estimate exactness and displacement of estimation of phase at the different gravimetric functions of the phase counting out. real work there is a theoretical synthesis of digital algorithms of evaluation of phase of harmonic signal, accepted on a background a gaussian hindrance, conditioned internal noises of receiving highway of the phase radio engineering system. Signum-transformation of initial mixture of signal and hindrance is thus used.

Keywords: *parameter, signal, algorithm, noise, synthesis, noisy signal, tract, digital, amplitude, phase, coefficient, synthesis, parameter, accuracy.*